Vorlesung: Quantenfeldtheorie II

Department Physik, Universität Hamburg
Übungsblatt 9

Sommersemester 2013
Ausgabetermin 17.06.13, 08:30h
Besprechung 24.06.13, 10:00h

- Aufgabe 1
  Betrachten Sie die Lagrange-Dichte für N reelle Skalarfelder ϕ^i, $i = 1, \ldots, N$,

$$\mathcal{L} \;=\; \sum_i \partial^\mu \phi^i \partial_\mu \phi^i - V(\phi^i)\,,$$

mit Potential

$$V(\phi^i) \;=\; -\frac{1}{2}\mu^2 \sum_i \phi^i \phi^i + \frac{\lambda}{4}\left(\sum_i \phi^i \phi^i\right)^2 ,$$

wobei $\mu^2, \lambda > 0$.
Bestimmen Sie die Symmetrie von $\mathcal{L}$ sowie des Minimums von V. Entwickeln Sie die Skalarfelder nach spontaner Symmetriebrechung um den Vakuumerwartungswert $\phi_0^1 = v, \phi_0^2 = \ldots = \phi_0^N = 0$ mit $\phi^1(x) = v + h(x)$ und $\phi^2(x), \ldots, \phi^N(x)$ und berechnen Sie die Masse der Felder.

- Aufgabe 2
  Die Lagrange-Dichte für eine ungebrochene $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ Eichtheorie ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}\,F^{a\,\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}\,B^{\mu\nu} + \left(D^{\mu ij}\phi^{*j}\right)\left(D^{ik}_\mu \phi^k\right) - V(\phi^i, \phi^{*i}) \\ & + \mathrm{i}\sum_{I=1}^{3} \bar{E}^{i\,I}_L \sigma^\mu D^{ij}_\mu E^{j\,I}_L + \mathrm{i}\sum_{I=1}^{3} \bar{e}^I_R \bar{\sigma}^\mu D_\mu e^I_R\,,\end{aligned}$$

mit chiralen Leptonen

$$E^{j\,I}_L = \begin{pmatrix}\nu_e \\ e^-_L\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\nu_\mu \\ \mu^-_L\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\nu_\tau \\ \tau^-_L\end{pmatrix}, \qquad e^I_R = e^-_R\,, \mu^-_R\,, \tau^-_R\,,$$

und kovarianten Ableitungen mit Kopplungskonstanten g, g', Hyperladung y und Generatoren $(t^a)^{ij} = \frac{1}{2}(\sigma^a)^{ij}$,

$$\begin{aligned} D^{ij}_\mu &= \partial_\mu \delta^{ij} - \mathrm{i}g A^a_\mu (t^a)^{ij} - \mathrm{i}g'\,y\,B_\mu \delta^{ij}\,, \\ D_\mu &= \partial_\mu - \mathrm{i}g' y\,B_\mu\,. \end{aligned}$$

Schreiben Sie die Langrange-Dichte als Funktion der physikalischen Felder $W^\pm$, Z^0 und des Photons γ nach spontaner Symmetriebrechung von $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \to U(1)_{em}$.
Hinweis: Entwickeln Sie das Skalarfeld nach spontaner Symmetriebrechung um den Vakuumerwartungswert $\phi^i_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 \\ v\end{pmatrix}$ und verwenden Sie unitäre Eichung. Die physikalischen Felder sind $W^\pm_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A^1_\mu \pm \mathrm{i}A^2_\mu\right)$, $Z^0 = \cos\theta_W A^3_\mu - \sin\theta_W B_\mu$ sowie das Photonfeld A^γ $A^\gamma = \sin\theta_W A^3_\mu + \cos\theta_W B_\mu$ mit Weinberg-Winkel $\cos(\sin)\theta_W = \frac{g(g')}{\sqrt{g^2+g'^2}}$.

- Aufgabe 3

  Nehmen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 2 und bestimmen Sie die Feld-Gleichungen für die $W^{\pm}$-Bosonen und das Z^0-Boson im Limes niedriger Energien, d.h. bei Impulsen $p^2 \ll m_W^2, m_Z^2$.

  Lösen Sie die Gleichungen nach den Felder $W^{\pm}$ und Z^0 und leiten Sie die Lagrange-Dichte für Fermi's Theorie der schwachen Wechselwirkung ab.

  Hinweis: Vernachlässigen Sie die kinetischen Terme für die Felder $W^{\pm}$ und Z^0.