Vorlesung: Quantenfeldtheorie II

Department Physik, Universität Hamburg — Sommersemester 2013

Übungsblatt 7 — Ausgabetermin 03.06.13, 08:30h

Besprechung 10.06.13, 10:00h

- Aufgabe 1

  Die eichfixierte Lagrange-Dichte für eine $SU(N)$ Eichtheorie mit minimaler Kopplung an Materiefelder ψ sei gegeben durch

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}\,F^{a\,\mu\nu} + \overline{\psi}\,(\not{D} + \mathrm{i}m)\,\psi + \frac{1}{2\alpha}\mathcal{G}^a\mathcal{G}^a - \mathrm{i}\eta^{*a}\frac{\partial\mathcal{G}^a}{\partial A^b_\mu}\,(D_\mu)^{bc}\,\eta^c\,,$$

  wobei $F_{\mu\nu}$ die Feldstärke, $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}gA_\mu$ die kovariante Ableitung und g die (dimensionslose) Kopplungskonstante ist. Die Eichfixierungsbedingung sei gegeben durch $\mathcal{G}^a$ und η bezeichen die Fadeev-Popov Geister (komplexe Grassmann-Felder). Die Indizes $a, b, c, \ldots = (N^2 - 1)$ laufen in der adjungierten Darstellung der $SU(N)$.
  Führen sie für die Fadeev-Popov Geister reelle Grassmann-Felder ρ und ω ein,

$$\eta^{*a} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\omega^a - \mathrm{i}\rho^a)\;,$$
$$\eta^{a} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\omega^a + \mathrm{i}\rho^a)\;,$$

  und schreiben sie die Lagrange-Dichte in ρ und ω um.

- Aufgabe 2

  Für die eichfixierte Lagrange-Dichte aus Aufgabe 1 als Funktion von ρ und ω sind die BRST (Becchi-Rouet-Stora, Tyupin) Transformationen mit einem (Grassmann-wertigen) Parameter ζ für die Eichfixierungsbedingung $\mathcal{G}^a = \partial \cdot A^a$ gegeben durch

$$\delta A^a_\mu \;=\; \frac{1}{g}\,\zeta\,(D_\mu\rho)^b\;,$$
$$\delta\omega^a \;=\; -\frac{1}{\alpha g}\,\partial\cdot A^a\zeta\,,$$
$$\delta\rho^a \;=\; \frac{1}{2}\zeta f^{abc}\rho^b\rho^c\,,$$
$$\delta\psi \;=\; \mathrm{i}\zeta\rho^a(t^a)\psi\,,$$

  wobei $t^a(f^{abc})$ die Generatoren der fundamentalen (adjungierten) Darstellung der $SU(N)$ sind.
  Zeigen Sie, dass die Wirkung S invariant ist unter den BRST Transformationen. Zeigen sie darüber hinaus, dass die BRST Transformationen nilpotent sind. Verwenden Sie hierbei die Grassmann-Eigenschaft, dass $\zeta^2 = 0$.

- Aufgabe 3 $\longrightarrow$ **Seite 2**

- Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass die Wirkung für eine $SU(N)$ Eichtheorie in Euklidischer Raum-Zeit Minima hat, wenn die Feldstärke selbstdual ist. Die Wirkung S ist

$$S = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \, \mathbf{tr} \left(F_{\mu\nu} \, F^{\mu\nu} \right) ,$$

wobei g die (dimensionslose) Kopplungskonstante ist und $F_{\mu\nu}$ die Feldstärke. Die duale Feldstärke ist definiert durch $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Ungleichung

$$\mathbf{tr} \left[\left(F_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu} \right) \left(F^{\mu\nu} - \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \right] \geq 0 \, .$$

b) Der sogenannte Pontryagin-Index klassifiziert topologisch inäquivalente Abbildungen des Randes der Euklidischen Raum-Zeit (eine S_3 Sphäre) in die Mannigfaltigkeit der $SU(N)$ Eichgruppe und ist definiert

$$n = \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \, \mathbf{tr} \left(F_{\mu\nu} \, \tilde{F}^{\mu\nu} \right) ,$$

wobei $n \in \mathbf{N}$ die Homotopie-Klasse angibt. Dann gilt für die Wirkung S

$$S \geq \frac{8\pi^2}{2g^2} n \, ,$$

und nicht-triviale Konfigurationen der Feldstärke $F_{\mu\nu}$ (oder des Eichfeldes A_μ) müssen folgendes Kriterium erfüllen,

$$\lim_{|x| \to \infty} F_{\mu\nu} = 0 \, , \qquad \lim_{x^2 \to \infty} A_\mu = -\mathrm{i} \mathcal{U} \partial_\mu \mathcal{U}^\dagger \, ,$$

wobei $\mathcal{U}$ eine Matrix in der $SU(N)$ Eichgruppe ist.
Zeigen Sie, dass für eine $SU(2)$ Eichgruppe diese Bedingungen erfüllt sind von der sogenannten Instanton-Lösung

$$A_\mu = -\mathrm{i} \frac{x^2}{x^2 + \lambda^2} \mathcal{U} \partial_\mu \mathcal{U}^\dagger \, ,$$

wobei λ der Radius des Instantons ist, $x^2 = t^2 + \vec{x} \cdot \vec{x}$ und die Matrizen $\mathcal{U}$ in der $SU(2)$ mit den Pauli-Matrizen $\vec{\sigma}$ folgende Form haben,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \left(t - \mathrm{i} \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \right) \, .$$

c) Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die Instanton-Lösung $A_\mu = -\mathrm{i} \frac{x^2}{x^2 + \lambda^2} \mathcal{U} \partial_\mu \mathcal{U}^\dagger$ den Pontryagin index $n = 1$ hat. (Vorsicht, etwas Rechenaufwand).