Vorlesung: Quantenfeldtheorie II

Department Physik, Universität Hamburg
Übungsblatt 6

Sommersemester 2013
Ausgabetermin 27.05.13, 08:30h
Besprechung 03.06.13, 10:00h

- Aufgabe 1
Die Lagrange-Dichte für eine $SU(N)$ Eichtheorie ist gegeben durch

$$\mathcal{L} \;=\; \sum_j \bar{\psi}_j \left(\mathrm{i}\gamma^\mu \left(D_\mu\psi\right)_j - m\bar{\psi}_j\psi_j \right) - \frac{1}{2g^2}\mathbf{tr}\left(F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}\right) ,$$

wobei g die (dimensionslose) Kopplungskonstante ist und die Spur $\mathbf{tr}$ läuft über die Matrizen in der $SU(N)$. Die kovariante Ableitung D_μ und Feldstärke $F_{\mu\nu}$ sind gegeben

$$\begin{aligned} \left(D_\mu\psi\right)_j &= \partial_\mu\psi_j - \mathrm{i}g\sum_j \left(A_\mu\right)_{jk}\psi_k \,, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \mathrm{i}g\left[A_\mu, A_\nu\right] . \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\sum_k \left[D_\mu, D_\nu\right]_{jk}\psi_k \;=\; -\mathrm{i}g\sum_k \left(F_{\mu\nu}\right)_{jk}\psi_k \,.$$

b) Verwenden Sie $\left(A_\mu\right)_{jk} = \sum_a A^a_\mu\, t^a_{jk}$ und zeigen Sie, dass

$$F^a_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu, A^c_\nu \,.$$

c) Zeigen Sie, dass

$$D_\rho F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\rho F_{\mu\nu} - \mathrm{i}g\left[A_\rho, F_{\mu\nu}\right] ,$$

eine kovariante Ableitung definiert und bestimmen Sie $D_\rho F^a_{\mu\nu}$.

- Aufgabe 2
Leiten Sie für die Lagrange-Dichte aus Aufgabe 1 die Bewegungsgleichung ab durch Variation der dazugehörigen Wirkung S unter infinitesimalen Transformationen des Eichfeldes

$$A_\mu \;\rightarrow\; A'_\mu \;=\; A_\mu + \delta A_\mu \,.$$

Zeigen Sie, dass sich die Bewegungsgleichung des Eichfeldes schreiben lässt als

$$D_\mu F^{\mu\nu} \;=\; 0 \,,$$

wobei D_μ die kovariante Ableitung ist.

- Aufgabe 3 $\longrightarrow$ **Seite 2**

- Aufgabe 3

  a) Zeigen Sie, dass die Matrizen $(t^a)_{bc} \equiv \mathrm{i} f^{abc}$ der adjungierten Darstellung einer $SU(N)$ Lie-Algebra folgende algebraische Relation erfüllen:

  $$\left[t^a, t^b\right] = \mathrm{i} \sum_c f^{abc}\, t^c ,$$

  wobei $a, b, c = 1, \ldots, d(G)$ und $d(G)$ die Dimension der adjungierten Darstellung ist.
  Hinweis: Verwenden Sie die Jacobi-Identität.

  b) Definieren Sie

  $$T^2_{ij} = \sum_{a=1}^{d(G)} \sum_{k=1}^{d(r)} t^a_{ik}\, t^a_{kj} ,$$

  wobei $i, j, k = 1, \ldots, d(r)$ und $d(r)$ die Dimension der fundamentalen Darstellung ist. Zeigen Sie, dass

  $$\left[t^a, T^2\right] = 0 .$$

  c) Verwenden Sie, dass $T^2_{ij} = c_2(r)\delta_{ij}$ und $\mathrm{t}\mathbf{r}(t^a t^b) = c(r)\delta^{ab}$, um zu zeigen, dass

  $$c(r)d(G) = c_2(r)d(r) .$$

  Geben Sie $c_2(r)$ für eine $SU(N)$ Lie-Algebra auch als Funktion von N an.