Vorlesung: Quantenfeldtheorie II

Department Physik, Universität Hamburg — Sommersemester 2013

Übungsblatt 5 — Ausgabetermin 06.05.13, 08:30h

Abgabe für Bonus und Besprechung 13.05.13, 10:00h

- Aufgabe 1 (6 Punkte)
  Betrachten Sie in der ϕ^4-Theorie mit der Lagrangedichte $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4$ die n-Punkt Green'sche Funktion $G^{(n)}$ an der Renormierungsskale M für renormierte Felder ϕ, Kopplung λ und Masse m und leiten Sie die Callan-Symanzik Gleichung für $G^{(n)}$ ab.
  Hinweis: Führen Sie zusätzlich zur β-Funktion und zur anomalen Dimension γ der Felder eine anomale Dimension der Masse ein, $\gamma_m = \dfrac{1}{2}M\partial_M\delta_m$.

- Aufgabe 2 (7 Punkte)
  Für masselose QED ($m_e = 0$) sind die Korrekturen zur Elektron-Selbstenergie $\Sigma(\not{p})$ und zur Polarisationsfunktion $\Pi(p^2)$ in dimensionaler Regularisierung, $D = 4 - 2\epsilon$, in einer Schleife gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\Sigma(\not{p}) &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\int\limits_0^1 dx\,(2-2\epsilon)(1-x)\not{p}\,\frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{-\epsilon}}\,\frac{1}{\Delta^\epsilon}\,,\\
\Pi(p^2) &= -\frac{8e^2}{(4\pi)^2}\int\limits_0^1 dx\,x(1-x)\,\frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{-\epsilon}}\,\frac{1}{\Delta^\epsilon}\,,
\end{aligned}
$$

  wobei $\Delta = -x(1-x)p^2$.

  a) Bestimmen Sie die Counter-Terme δ_2 und δ_3 für die Renormierungsbedingungen

$$
\delta_2 = \frac{d}{d\not{p}}\Sigma(\not{p})\Big|_{p^2=-M^2}\,, \qquad \delta_3 = \Pi(p^2=-M^2)\,,
$$

  und die anomalen Dimensionen der Felder aus $\gamma_i = \dfrac{1}{2}M\partial_M\delta_i$ für $i = 2, 3$.

  b) Verwenden Sie, dass für den Vertex Counter-Term in QED zu allem Ordnungen gilt $\delta_1 = \delta_2$, um die QED β-Funktion aus der Callan-Symanzik Gleichung für den Elektron-Photon Vertex zu bestimmen.

- Aufgabe 3 (7 Punkte)
  Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$
(\partial_t + v(x)\partial_x - \rho(x))\,D(t,x) = 0\,,
$$

  und zeigen Sie, dass die Lösung gegeben ist durch

$$
D(t,x) = D_0(\bar{x}(t,x))\,\exp\left(\int\limits_0^t dt'\,\rho(\bar{x}(t',x))\right)\,,
$$

  mit einer beliebigen Anfangsbedingung $D_0(x)$ für $t = 0$ sowie

$$
\partial_{t'}\bar{x}(t',x)) = -v(\bar{x})\,, \qquad \bar{x}(0,x) = x\,.
$$