Vorlesung: Quantenfeldtheorie II

Department Physik, Universität Hamburg
Übungsblatt 4

Sommersemester 2013
Ausgabetermin 29.04.13, 08:30h
Besprechung 06.05.13, 10:00h

- Aufgabe 1

  Betrachten Sie die ϕ^4-Theorie mit der Lagrangedichte $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4$.

  a) Berechnen Sie die Korrekturen zum Propagator zu einer Schleife in dimensionaler Regularisierung, $D = 4 - 2\epsilon$. Zeigen Sie, dass das Ergebnis proportional zu $m^{D-2}\Gamma(1 - D/2)$ ist.

  b) Addieren Sie den entsprechenden Counter-Term und bestimmen Sie die Renormierungskonstanten δ_Z und δ_m zur ersten Ordnung in λ.

- Aufgabe 2

  Betrachten Sie den $2 \to 2$ Streuprozess in der ϕ^4-Theorie mit Impulsen

$$\phi(p_1) + \phi(p_2) \to \phi(p_3) + \phi(p_4)\,,$$

  wobei $p_i^2 = m^2$. Das invariante Matrix-Element $\mathcal{M}_{\phi\phi\to\phi\phi}$ ist eine Funktion der Mandelstam-Variablen $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $u = (p_2 - p_3)^2$ und der Teilchenmasse m^2. Einschließlich der Korrekturen zu einer Schleife hat es folgende Form,

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_{\phi\phi\to\phi\phi} = -\mathrm{i}\lambda + (-\mathrm{i}\lambda)^2\left(\mathrm{i}V(s) + \mathrm{i}V(t) + \mathrm{i}V(u)\right) - \mathrm{i}\delta_\lambda\,,$$

  wobei $\delta_\lambda = -\lambda^2\left(V(4m^2) + 2V(0)\right)$ fixiert ist als Counter-Term zu erster Ordnung.

  a) Berechnen Sie $V(p^2)$ in dimensionaler Regularisierung, $D = 4 - 2\epsilon$ als

$$\begin{aligned}\mathrm{i}V(p^2) &= \frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{k^2 - m^2}\frac{\mathrm{i}}{(k+p)^2 - m^2}\\ &= -\frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 dx\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) + \ln\Delta + \mathcal{O}(\epsilon)\right)\,,\end{aligned}$$

  und bestimmen Sie Δ.

  b) Bestimmen Sie $\mathcal{M}_{\phi\phi\to\phi\phi}$ explizit zu einer Schleife und zeigen Sie, dass es folgende Form hat,

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_{\phi\phi\to\phi\phi} = -\mathrm{i}\lambda + \mathrm{i}\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx\,\ln X\,,$$

  und bestimmen Sie X.
  Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus a).

- Aufgabe 3 $\longrightarrow$ **Seite 2**

- Aufgabe 3

Betrachten Sie die Lagrangedichte für fermionische Materie gekoppelt an ein Skalarfeld über eine Higgs-Yukawa Kopplung, also

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m_\psi\right)\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi\phi + \frac{1}{4!}\lambda phi^4 + y_\psi\phi\bar{\psi}\psi\,,$$

wobei ψ ein Dirac-Spinor und ϕ ein reelles Skalarfeld sei.

a) Schreiben Sie $\mathcal{L}$ als Funktion der renormierten Felder ϕ^r und ψ^r sowie der renomierten Massen und Kopplungen m_ϕ^r, m_ψ^r, λ^r und y_ψ^r. Führen Sie dazu geeignete Counter-Terme δ_{Z_ϕ}, δ_{Z_ψ}, δ_{m_ϕ}, δ_{m_ψ}, δ_λ und δ_{y_ψ} ein.

b) Welche Renormierungsbedingungen müssen erfüllt werden und welche Counter-Terme werden dadurch fixiert ? Zeichnen Sie die Feynman-Diagramme zu einer Schleife.