Vorlesung: Quantenfeldtheorie II

Department Physik, Universität Hamburg
Sommersemester 2013
Übungsblatt 3
Ausgabetermin 22.04.13, 08:30h
Besprechung 29.04.13, 10:00h

- Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass für eine symmetrische Matrix A gilt:
$$\det(A) \,=\, \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\ln A}\,,$$
und berechnen Sie damit
$$\frac{\partial \det(B)}{\partial B_{ij}}\,.$$

- Aufgabe 2
Betrachten Sie das erzeugende Funktional für ein reelles Skalarfeld ϕ
$$Z[J] \,=\, \int \mathcal{D}\phi\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int d^4x(\mathcal{L}_0[\phi]+J\phi)}\,,$$
mit der Lagrangedichte $\mathcal{L}_0 \,=\, \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi)$ und werten Sie das Funktionalintegral in einer Sattelpunktsapproximation aus für Fluktuationen $\delta\phi$ um die klassische Feldkonfiguration $\phi(x) \,=\, \phi_{\mathrm{cl}}(x) + \delta\phi(x)$, wobei die klassischen Feldkonfigurationen $\phi_{\mathrm{cl}}(x)$ ein Extremum der Wirkung sind.
Schreiben Sie alle Faktoren $\hbar$ auf und zeigen Sie, dass die Sattelpunktsapproximation einer asymptotischen Entwicklung in $\hbar$ entspricht.

- Aufgabe 3
Der Fermion-Propagator $S_F(x-y)$ ist gegeben durch
$$S_F(x-y) \,=\, \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \exp\left(-\mathrm{i}k\cdot(x-y)\right)\, \frac{\mathrm{i}\,(\not{k}+m)}{k^2-m^2}\,,$$
und erfüllt
$$(\mathrm{i}\,\not{\partial} - m)\,S_F(x-y) \,=\, \mathrm{i}\,\delta^{(4)}(x-y)\,.$$
  a) Verwenden Sie $\gamma^0\,\gamma_\mu\,\gamma^0 \,=\, \gamma_\mu^\dagger$ um zu zeigen, dass
  $$\gamma^0\,S_F^\dagger(x-y)\,\gamma^0 \,=\, -S_F(y-x)\,,$$
  und, dass
  $$\mathrm{i}\partial_x^\mu\,S_F(y-x)\,\gamma_\mu + mS_F(y-x) \,=\, -\mathrm{i}\,\delta^{(4)}(x-y).$$
  b) Zeigen Sie, dass sich das erzeugende Funktional $Z[\eta,\bar\eta]$ mit der Lagrangedichte für ein Dirac-Feld ψ
  $$\mathcal{L} \,=\, \bar\psi\,(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi\,,$$
  schreiben lässt als
  $$Z[\eta,\bar\eta] \,=\, \int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar\psi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int d^4x\left(\mathcal{L}+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta\right)} \,=\, Z[0]\,\mathrm{e}^{-\int d^4x\int d^4y(\bar\eta(x)S_F(x-y)\eta(y))}\,.$$
  Ergänzen Sie dazu $\psi(x) \,=\, \psi'(x) + c\int d^4y S_F(x-y)\eta(y)$ mit einer passenden Konstante c und verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a).