Vorlesung: Quantenfeldtheorie II

Department Physik, Universität Hamburg
Übungsblatt 2

Sommersemester 2013
Ausgabetermin 15.04.13, 08:30h
Besprechung 22.04.13, 10:00h

- Aufgabe 1

  Betrachten Sie die Lagrangedichte eines reellen Skalarfeldes ϕ mit Wechselwirkung

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 .$$

  a) Schreiben Sie das das erzeugende Funktional $Z[J]$ auf als Potenzreihe in der Selbstwechselwirkung λ.

  b) Drücken Sie das das erzeugende Funktional $Z[J]$ durch das der freien Theorie $Z_0[J]$ (mit $\lambda = 0$) in folgender Form aus:

$$Z[J] = \exp\left\{ S_I\left(\phi = -\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right\} Z_0[J] ,$$

  und geben Sie S_I an.

  c) Wie sieht $Z[J]$ aus für ein allgemeines Potential $V(\phi)$ in der Lagrangedichte, also für $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + V(\phi)$?

- Aufgabe 2

  Für ein reelles Skalarfeld ϕ ist die effektive Wirkung $\Gamma[\phi_{\rm cl}]$ definiert als

$$\Gamma[\phi_{\rm cl}] = -E[J] - \int d^4y\, J(y)\phi_{\rm cl}(y) ,$$

  wobei $E[J] = \mathrm{i}\ln Z[J]$ und $\phi_{\rm cl}(y) = -\frac{\delta E[J]}{\delta J(y)}$ sind.

  a) Zeigen Sie, dass die klassischen Feldkonfigurationen $\phi_{\rm cl}(y)$ ein Extremum der effektiven Wirkung sind mit

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_{\rm cl}]}{\delta\phi_{\rm cl}(y)} = 0\Big|_{J=0} .$$

  b) Geben Sie einen expliziten Ausdruck für $\Gamma[\phi_{\rm cl}]$ an unter Verwendung der Lagrangedichte eines reellen Skalarfeldes ϕ (siehe Aufgabe 1).

- Aufgabe 3

  Betrachten Sie die Lagrangedichte für ein Eichboson

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d^4x\, A_\mu D^{\mu\nu} A_\nu ,$$

wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, und $D^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu$. Die Green'sche Funktion ist im Ortsraum definiert als Lösung der Gleichung

$$D^{\mu\nu} G_{\nu\rho}(x-y) \;=\; \mathrm{i}\, g^\mu_\rho\, \delta^{(4)}(x-y)\,,$$

bzw. im Impulsraum durch

$$G_{\nu\rho}(x-y) \;=\; \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \exp\left(-\mathrm{i}k\cdot(x-y)\right)\, \tilde{G}_{\nu\rho}(k)\,.$$

a) Berechnen Sie $\tilde{G}_{\nu\rho}(k)$. Ist $\tilde{G}_{\nu\rho}(k)$ wohl definiert ?

b) Addieren Sie den Eichfixierungsterm zur Wirkung

$$S_{\mathrm{fix}} \;=\; -\frac{1}{2\xi} \int d^4x\, \left(\partial^\mu A_\mu\right)^2\,,$$

und bestimmen erneut $\tilde{G}_{\nu\rho}(k)$. Ist $\tilde{G}_{\nu\rho}(k)$ nun wohl definiert ?