Vorlesung: Quantenfeldtheorie II

Department Physik, Universität Hamburg | Sommersemester 2013
Übungsblatt 1 | Ausgabetermin 08.04.13, 08:30h
Besprechung 15.04.13, 10:00h

- Aufgabe 1

  Es seien a, A und J unabhängig von x. Zeigen Sie, dass gilt:

  a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}ax^2+Jx} \quad = \quad \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{\frac{J^2}{2a}} .$$

  b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \, \ldots \, dx_N \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^T\cdot A\cdot x + J^T\cdot x} \quad = \quad \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det(A)}}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}J^T\cdot J} ,$$

  wobei $x^T \cdot A \cdot x \equiv \sum_{i,j=1}^{N} x_i A_{ij} x_j$ und $J^T \cdot x \equiv \sum_{i,j=1}^{N} J_i x_i$.

  c) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \, \ldots \, dx_N \, x_i \, x_j \, x_k \, x_l \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^T\cdot A\cdot x} .$$

  Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus b), differenzieren Sie nach $\partial/\partial J_i$ usw. und setzen am Ende $J = 0$.

- Aufgabe 2

  a) Es seien $f, S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ und holomorphe Funktionen im Integrationsbereich sowie $x \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Zeigen Sie, dass für einen Sattelpunkt von $S(x)$ im Integrationsbereich bei x_0, also $S'(x_0) = 0$, folgende Abschätzung für $\lambda \to \infty$ gilt:

$$\int_I dx\, f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda S(x)} \;\simeq\; \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \mathrm{e}^{\lambda S(x_0)} \frac{1}{\sqrt{\det(-S''(x_0))}} \left(f(x_0) + \mathcal{O}\left(\lambda^{-1}\right)\right) ,$$

  wobei $S'(x) = \partial S(x)/\partial x_i$ und $S''(x) = \partial^2 S(x)/\partial x_i \partial x_j$.

  b) Wenden Sie Ihr Ergebnis an, um die Stirling-Approximation für $n!$ abzuleiten, also

$$n! \;=\; \Gamma(n+1) \;=\; \int_0^{\infty} dx\, x^n\, \mathrm{e}^{-x} \;\simeq\; \sqrt{2\pi}\, n^n\, \mathrm{e}^{-n} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{12}\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots\right) .$$

- <u>Aufgabe 3</u>
  Betrachten Sie das erzeugende Funktional

$$Z[J] \;=\; \int \mathcal{D}\phi \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int d^4x (\mathcal{L}_0[\phi] + J\phi)} \;=\; Z[0] \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int d^4x \, d^4y \, J(x) \, G_F(x-y) \, J(y)} \, ,$$

  mit der Lagrangedichte $\mathcal{L}_0 \;=\; \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$ eines skalaren Teilchens und dem Feynman-Propagator $G_F(x-y) \;=\; \int d^4k \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)} \, \dfrac{\mathrm{i}}{k^2 - m^2}$.

  a) Bestimmen Sie durch explizite Berechnung des Pfadintegrals

$$\langle 0 | T\left\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\right\} | 0 \rangle \;=\; \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\phi \, \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int d^4x (\mathcal{L}_0[\phi])} \, .$$

  b) Bestimmen Sie $\langle 0 | T\left\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\right\} | 0 \rangle$, indem Sie $Z[J]$ geeignet nach $\partial/\partial J(x_i)$ differenzieren setzen Sie am Ende $J = 0$.