Vorlesung: Quantenfeldtheorie I

Department Physik, Universität Hamburg
Übungsblatt 4

Wintersemester 2012/2013
Abgabetermin 19.11.12, 12:00h
Besprechung 21.11.12, 14:00h

- Aufgabe 1 (8 Punkte)

Die Lösung der Dirac-Gleichung kann ausgedrückt werden durch $\psi^+ = u(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$ und $\psi^- = v(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$, wobei die Spinoren u und v definiert sind als:

$$u(p) = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} (p\cdot\sigma + m)\xi^s \\ (p\cdot\bar{\sigma} + m)\xi^s \end{pmatrix}, \qquad v(p) = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} (p\cdot\sigma + m)\xi^s \\ -(p\cdot\bar{\sigma} + m)\xi^s \end{pmatrix},$$

mit $p^0 = E_p$, $N = \sqrt{2(E_p + m)}$, $\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \sigma^i)$ und $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}, -\sigma^i)$ sowie den konstanten Spinoren $\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Spinoren folgender Normierung genügen

$$\bar{u}^r_a(p)u^s_a(p) = 2m\delta^{rs}, \qquad \bar{v}^r_a(p)v^s_a(p) = -2m\delta^{rs}, \qquad \bar{u}^r_a(p)v^s_a(p) = 0,$$
$$u^{r,\dagger}_a(p)u^s_a(p) = 2p^0\delta^{rs}, \qquad v^{r,\dagger}_a(p)v^s_a(p) = 2p^0\delta^{rs}.$$

b) Zeigen Sie, dass für die Spinsumme gilt

$$\sum_{s=1}^{2} u^s_a(p)\bar{u}^s_b(p) = \gamma^\mu_{ab}\, p_\mu + m\delta_{ab}, \qquad \sum_{s=1}^{2} v^s_a(p)\bar{v}^s_b(p) = \gamma^\mu_{ab}\, p_\mu - m\delta_{ab},$$

c) Zeigen Sie die Gordon-Identität

$$\bar{u}(p)\gamma^\mu u(k) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p)\left(p^\mu + k^\mu - \frac{1}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right](p_\nu - k_\nu)\right)u(k),$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass $(\gamma^\mu k_\mu - m)u(k) = 0$ und $\bar{u}(p)(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0$.

- Aufgabe 2 (5 Punkte)

Berechnen Sie den Anti-Kommutator für ein reelles Skalarfeld ϕ,

$$\{\phi(x), \phi(y)\},$$

welches Sie mittels folgender Anti-Kommutatorrelation für die Operatoren a_p und $a_p^\dagger$ quantisieren,

$$\left\{a_p, a_k^\dagger\right\} = (2\pi)^3\,\delta^{(3)}\left(\vec{p} - \vec{k}\right).$$

Warum liefert dies keine konsistente Beschreibung für einen Propagator?

- Aufgabe 3 (7 Punkte) $\longrightarrow$ **Seite 2**

- Aufgabe 3 (7 Punkte)

Γ_A bezeichnet die 16 komplexen 4×4 Matrizen

$$1\,, \quad \gamma^\mu\,, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]\,, \quad \gamma^\mu\gamma^5\,, \quad \gamma^5\,.$$

a) Zeigen Sie, dass es für ein $\Gamma_A \neq 1$ ein B gibt, so dass

$$\{\Gamma_A, \Gamma_B\} \;=\; 0\,.$$

b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{tr}\left(\Gamma_A\right) \;=\; 0\,,$$

für $\Gamma_A \neq 1$ und, dass gilt

$$\mathrm{tr}\left(\Gamma_A\Gamma_B\right) \;=\; 4K_A\delta_{AB}\,,$$

wobei $K_A = (\Gamma_A)^2 = \pm 1$.
Hinweis: Verwenden Sie dazu die Zyklizität der Spur, also $\mathrm{tr}\left(\Gamma_A\Gamma_B\right) \;=\; \mathrm{tr}\left(\Gamma_B\Gamma_A\right)$.

c) Zeigen Sie, dass die Γ_A linear unabhängig sind und eine Basis im Raum der komplexen 4×4 Matrizen aufspannen.

d) Zeigen Sie die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{A=1}^{16}\left(\Gamma_A^{-1}\right)_{ab}\left(\Gamma_A\right)_{cd} \;=\; 4\delta_{ad}\delta_{bc}\,.$$