Vorlesung: Quantenfeldtheorie I

Department Physik, Universität Hamburg
Übungsblatt 3

Wintersemester 2012/2013
Abgabetermin 12.11.12, 12:00h
Besprechung 14.11.12, 14:00h

- Aufgabe 1 (9 Punkte)

  Betrachten Sie die Lagrangedichte

  $$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi\phi + j\phi\,,$$

  mit einer klassischen Quelle $j(x)$.

  a) Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für $\phi(x)$ und drücken Sie die Lösung für $\phi(x)$ durch die retardierte Green'sche Funktion aus.

  b) Die klassische Quelle sei nicht verschwindend nur in der Vergangenheit, also $j(x) \neq 0$ für $x^0 < 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung für $\phi(x)$ dann ausgedrückt werden kann durch

  $$\phi(x) \;=\; \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(\tilde{a}_p\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \tilde{a}_p^\dagger\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p\cdot x}\right)\Big|_{p^0=E_p}\,,$$

  wobei $\tilde{a}_p \;\equiv\; a_p + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_p}}\tilde{j}(p)$ und $\tilde{j}(p) \;=\; \int d^4x\, j(x)\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p\cdot x}$.

  c) Berechnen Sie $\langle 0|H|0\rangle$, nachdem die Quelle abgeschaltet worden ist.
  Hinweis: Verwenden Sie dazu den Hamiltonoperator H mit den Operatoren $\tilde{a}_p$ und $\tilde{a}_p^\dagger$ aus Teilaufgabe b).

- Aufgabe 2 (6 Punkte)

  Betrachten Sie die Lagrangedichte für ein Dirac-Feld ψ

  $$\mathcal{L} \;=\; \bar{\psi}\,(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi\,.$$

  a) Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ invariant ist unter folgender Transformation der Felder $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{\mathrm{i}\alpha}\psi(x)$, wobei $\alpha \in \mathbf{R}$ konstant sei.
  Berechnen Sie den dazugehörigen Noether-Strom und die dazugehörige Noether-Ladung.

  b) Unter welchen Bedingungen ist die Transformation $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{\mathrm{i}\beta\gamma_5}\psi(x)$ mit $\beta \in \mathbf{R}$ konstant eine Symmetrie der Lagrangedichte $\mathcal{L}$?
  Berechnen Sie den dazugehörigen Noether-Strom und zeigen Sie, dass er erhalten ist.

- Aufgabe 3 (5 Punkte) $\longrightarrow$ **Seite 2**

- <u>Aufgabe 3</u> (5 Punkte)

  Der Generator $L_{\mu\nu}$ für eine infinitesimale Lorentz-Transformation ist gegeben durch

  $$L_{\mu\nu} = \mathrm{i}\,(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \ .$$

  Zeigen Sie die Abgeschlossenheit der Algebra, also

  $$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \mathrm{i}\,(g_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} - g_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} L_{\nu\rho}) \ .$$

  Zeigen Sie, dass die Komponenten von $L_{\mu\nu}$ separat die Generatoren $J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} L_{jk}$ einer infinitesimalen Rotation und $K_i = L_{0i}$ eines Boosts definieren, wobei $i = 1, 2, 3$ und ϵ_{ijk} der antisymmetrische Tensor ist, und berechnen Sie die Vertauschungsrelationen $[J_i, J_j]$, $[J_i, K_j]$ und $[K_i, K_j]$.