Vorlesung: Quantenfeldtheorie I

Department Physik, Universität Hamburg
Übungsblatt 2

Wintersemester 2012/2013
Abgabetermin 05.11.12, 12:00h
Besprechung 07.11.12, 14:00h

- Aufgabe 1 (5 Punkte)
  Die Lösung der Klein-Gordon Gleichung und der dazugehörige konjugierte Impuls $\pi(x)$ können ausgedrückt werden durch

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_p^\dagger \, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}p\cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_p} ,$$

$$\pi(x) = -\mathrm{i} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{2}} \left(a_p \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_p^\dagger \, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}p\cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_p} .$$

  a) Invertieren Sie diese Relationen und leiten Sie Ausdrücke für a_p und $a_p^\dagger$ als Funktion von $\phi(x)$ und $\pi(x)$ ab.
  b) Zeigen Sie, dass $\partial_t \, a_p = \partial_t \, a_p^\dagger = 0$.
     Hinweis: Verwenden Sie dazu partielle Integration und nehmen Sie an, dass $\phi(x)$ für $|\vec{x}| \to \infty$ verschwindet.

- Aufgabe 2 (10 Punkte)
  Berechnen Sie den Feynman-Propagator eines skalaren Teilchens im Ortsraum ausgedrückt durch Bessel-Funktionen,

$$\int d^4k \, \exp\left(-\mathrm{i}k \cdot x\right) \frac{\mathrm{i}}{k^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} ,$$

  wobei $\epsilon > 0$.
  Verwenden Sie die Entwicklung der Bessel-Funktionen im Limes $m \to 0$, um den masselosen Feynman-Propagator im Ortsraum abzuleiten.
  Hinweis: Schreiben Sie $d^3\vec{k}$ in Kugelkoordinaten und verwenden Sie für die Integration über die Radialkomponente das Ergebnis

$$\int\limits_0^\infty dx \, \sin(ax) \, \exp\left(-\beta\sqrt{\gamma^2 + x^2}\right) \frac{x}{\sqrt{\gamma^2 + x^2}} = \frac{a\gamma}{\sqrt{a^2 + \beta^2}} K_1\left(\gamma\sqrt{a^2 + \beta^2}\right) ,$$

  wobei $a > 0$, $\mathrm{Re}\beta > 0$, $\mathrm{Re}\gamma > 0$ und $K_1(x)$ die Bessel-Funktion zweiter Art ist (siehe Gradshteyn, Ryzhik *Table of Integrals, Series and Products* 3.961).

- Aufgabe 3 (5 Punkte)
  Beweisen Sie folgende Relationen nur unter Verwendung der algebraischen Eigenschaft des Anti-Kommutators $\{\gamma^\mu, \gamma^v\} = 2g^{\mu\nu}$, d.h. ohne eine explizite Darstellung für die Dirac γ-Matrizen zu verwenden.

  a) $\left(\gamma^5\right)^2 = 1$.
  b) $\gamma_\mu \, \not{a} \, \gamma^\mu = -2\not{a}$.
  c) $\gamma_\mu \, \not{a} \, \not{b} \, \gamma^\mu = 4a \cdot b$.
  d) $\mathrm{tr} \, \gamma^5 = 0$.
  e) $\mathrm{tr} \, \not{a} \, \not{b} = 4a \cdot b$.