

Übung zur Vorlesung “Statistische Methoden der Datenanalyse”
H. Kolanoski, M. Kowalski – SS 2002

Blatt 11

Aufgabe 17: ML-Schätzung des Parameters p einer Binomialverteilung (5 Punkte)

Sie haben bei n Versuchen k -mal Erfolg gehabt. Nehmen Sie an, dass die Erfolge binomial verteilt sind.

- a) Schätzen Sie mit Hilfe der ML-Methode den Parameter p (Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg) und dessen Varianz ab. Die Varianz kann durch die zweite Ableitung der Log-Likelihood-Funktion bestimmt werden.
- b) Beurteilen Sie Erwartungstreue und Konsistenz der Schätzung von p und belegen Sie diese Beurteilung.

Aufgabe 18: ML-Bestimmung einer Zerfallswinkelverteilung (8 Punkte)

Bei dem Zerfall eines Teilchens trete ein Zerfallsprodukt unter dem Polarwinkel θ relativ zu der Spin-Richtung des zerfallenden Teilchens auf. Ein theoretisches Model sagt folgende Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsdichte von $z = \cos \theta$ voraus:

$$f(z|a) = \frac{1}{2}(1 + az) \quad (1)$$

Die Beobachtung von 20 Zerfällen ergab folgende Werte für z :

$z(1) =$	-0.387	$z(11) =$	0.534
$z(2) =$	0.330	$z(12) =$	-0.030
$z(3) =$	0.851	$z(13) =$	0.111
$z(4) =$	-0.361	$z(14) =$	-0.676
$z(5) =$	0.503	$z(15) =$	0.531
$z(6) =$	0.697	$z(16) =$	-0.767
$z(7) =$	0.565	$z(17) =$	0.064
$z(8) =$	0.758	$z(18) =$	0.065
$z(9) =$	0.207	$z(19) =$	0.909
$z(10) =$	-0.679	$z(20) =$	0.246

- a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte in (1) für alle a im Definitionsbereich $-1 \leq a \leq +1$ richtig normiert ist.

- b) Bestimmen Sie die Log-Likelihood-Funktion \mathcal{L} für die Messwerte und stellen Sie $\mathcal{L}(a)$ sowie die ersten und zweiten Ableitungen für den gesamten Definitionsbereich von a graphisch dar.
- c) Bestimmen Sie die ML-Schätzung für den Parameter a numerisch oder graphisch.
- c) Bestimmen Sie den Fehler σ_a von a aus der Änderung von $\mathcal{L}(a)$ um \hat{a} und mit Hilfe der zweiten Ableitung. Vergleichen Sie beide Ergebnisse.