Ausgabe: 4.7.2000
Abgabe: 11.7.2000

Übung zur Vorlesung "Statistische Methoden der Datenanalyse"
H. Kolanoski (kolanoski@ifh.de) – SS 2000

Blatt 6

Aufgabe 15: ML-Schätzung des Parameters p einer Binomialverteilung (5 Punkte)
Sie haben bei n Versuchen k-mal Erfolg gehabt. Nehmen Sie an, dass die Erfolge binomial verteilt sind.

a) Schätzen Sie mit Hilfe der ML-Methode den Parameter p (Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg) und dessen Varianz ab. Die Varianz kann durch die zweite Ableitung der Log-Likelihood-Funktion bestimmt werden.

b) Beurteilen Sie Erwartungstreue und Konsistenz der Schätzung von p und belegen Sie diese Beurteilung.

Aufgabe 16: ML-Bestimmung einer Zerfallswinkelverteilung (8 Punkte)
Bei dem Zerfall eines Teilchens trete ein Zerfallsprodukt unter dem Polarwinkel θ relativ zu der Spin-Richtung des zerfallenden Teilchens auf. Ein theoretisches Model sagt folgende Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsdichte von $z = \cos\theta$ voraus:

$$f(z|a) = \frac{1}{2}(1 + az) \tag{1}$$

Die Beobachtung von 20 Zerfällen ergab folgende Werte für z:

```
z( 1) =  -0.387        z( 11)=   0.534
z( 2) =   0.330        z( 12)=  -0.030
z( 3) =   0.851        z( 13)=   0.111
z( 4) =  -0.361        z( 14)=  -0.676
z( 5) =   0.503        z( 15)=   0.531
z( 6) =   0.697        z( 16)=  -0.767
z( 7) =   0.565        z( 17)=   0.064
z( 8) =   0.758        z( 18)=   0.065
z( 9) =   0.207        z( 19)=   0.909
z(10) =  -0.679        z( 20)=   0.246
```

a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte in (1) für alle a im Definitionsbereich $-1 \leq a \leq +1$ richtig normiert ist.

b) Bestimmen Sie die Log-Likelihood-Funktion $\mathcal{L}$ für die Messwerte und stellen Sie $\mathcal{L}(a)$ sowie die ersten und zweiten Ableitungen für den gesamten Definitionsbereich von a graphisch dar.

c) Bestimmen Sie die ML-Schätzung für den Parameter a numerisch oder graphisch.

c) Bestimmen Sie den Fehler σ_a von a aus der Änderung von $\mathcal{L}(a)$ um $\hat{a}$ und mit Hilfe der zweiten Ableitung. Vergleichen Sie beide Ergebnisse.

Aufgabe 17: Erzeugung einer χ^2-Verteilung (7 Punkte)

Erzeugen Sie sich Messreihen mit jeweils 10 Messwerten x_i, die einer Gauss-Verteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ folgen.

a) Berechnen Sie für jede Messreihe den χ^2-Wert und tragen Sie die Werte in ein Histogramm ein. Zeichnen Sie in das Histogramm die erwartete Verteilung ein (mit der richtigen Normierung).

b) Bestimmen Sie für jede Messreihe das Vertrauensniveau α (wie in der Vorlesung definiert) entweder numerisch durch Aufintegration der χ^2-Verteilung oder indem Sie das entsprechende Programm in DATAN (oder sonstige Programme) benutzen. Stellen Sie die Verteilung der Messreihen als Funktion von α als Histogramm dar.

   Programm in DATAN: Die chi^2-Verteilunger erhält man mit folgenden Funktionen (x=χ^2, n=Freiheitsgrad, p= F(χ^2)):

   SDCHI2(x,n) = Wahrscheinlichkeitsdichte

   SCCHI2(x,n) = Verteilungsfunktion

   SCCHI2(p,n) = Verteilungsfunktion F(χ^2)=p $\Longrightarrow$ χ^2