

# Kapitel 4

## Erhaltungssätze und Symmetrien

Invarianzen von Naturgesetzen bezüglich Transformationen, auch Symmetrien genannt, spielen in der Physik eine wesentliche Rolle. Wahrscheinlich sind sie sogar der Schlüssel zur Formulierung von Naturgesetzen überhaupt. Beispiele für solche Transformationen, die die Naturgesetze invariant lassen, sind Verschiebungen in Raum und Zeit oder Verschiebungen mit einer konstanten Geschwindigkeit (Lorentz-Transformation). Wir glauben, daß es keine Rolle spielt, wo im Universum, zu welcher Zeit oder in welchem Inertialsystem wir ein Experiment machen. Ob diese Annahme allgemeine Gültigkeit hat, wissen wir nicht exakt, sondern nur mit einer durch die Experimente gegebenen Genauigkeit.

Es zeigt sich, daß mit solchen Invarianzen Erhaltungsgrößen (quantenmechanisch sind es erhaltene Quantenzahlen) verknüpft sind, wie zum Beispiel Energie, Impuls, Drehimpuls, Ladung usw. Es gibt ein Theorem (Noether-Theorem), das besagt, daß es zu jeder Transformation, die ein System invariant läßt, eine in diesem System erhaltene Größe gibt. Dieser Satz hat für die Physik eine fundamentale Bedeutung.

In der Teilchenphysik gibt es Größen, die absolut erhalten sind (bzw. die innerhalb der experimentellen Genauigkeit erhalten sind). Andere Größen sind in einigen Wechselwirkungen erhalten, in anderen nicht. Die meisten Erhaltungsgrößen gibt es in der starken Wechselwirkung, die wenigsten in der schwachen Wechselwirkung.

### 4.1 In allen Wechselwirkungen erhaltene Größen

- a) **Energie, Impuls, Drehimpuls** sind in abgeschlossenen Systemen immer erhalten:

$$\sum_i E_i = const; \quad \sum_i \vec{p}_i = const; \quad \sum_i \vec{j}_i = const \quad (4.1)$$

- b) **Elektrische Ladung** ( $Q$ ): Die Summe der Ladungen ist im Anfangs- und

Endzustand einer Reaktion immer gleich; zum Beispiel:

$$\begin{array}{rcccc}
 & \pi^- & p & \rightarrow & \pi^- & p \\
 Q: & -1 & +1 & & -1 & +1 \\
 & \pi^- & p & \rightarrow & \pi^0 & n \\
 Q: & -1 & +1 & & 0 & 0 \\
 & \pi^- & p & \rightarrow & \pi^0 & \pi^+ & \pi^- & n \\
 Q: & -1 & +1 & & 0 & +1 & -1 & 0
 \end{array}$$

Die Ladungsquantenzahl ist additiv, z.B. ist für die aufgeführten Reaktionen die Summe der Ladungen sowohl auf der rechten als auch auf der linken Seite 0.

c) **Baryonenzahl** ( $B$ ):

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & p & n & q & \bar{p} & \bar{n} & \bar{q} \\
 B & +1 & +1 & +1/3 & -1 & -1 & -1/3
 \end{array}$$

Die Kernbausteine  $p$ ,  $n$  haben  $B = +1$ . Da Baryonen aus drei Quarks aufgebaut sind ( $|qqq\rangle$ ), haben demnach Quarks  $B = 1/3$ . Die Antiteilchen haben jeweils die negative Baryonenzahl (das gilt für jede ‘ladungsartige’ Quantenzahl). Eine mögliche Reaktion ist:

$$\begin{array}{rcccccc}
 & p & p & \rightarrow & p & \bar{p} & n & p & \pi^+ \\
 B: & +1 & +1 & & +1 & -1 & +1 & +1 & 0
 \end{array}$$

Eine Verletzung der Baryonenzahlerhaltung wird von “Grand Unified Theories (GUT)” vorhergesagt und spielt in kosmologischen Modellen eine wesentliche Rolle. Eine Vorhersage dieser Theorien ist der Protonzerfall, der allerdings bisher (2007) experimentell nicht bestätigt werden konnte. Die untere Grenze für die Lebensdauer des Protons ist etwa  $10^{33}$  Jahre (durch die untersuchten Zerfallsmoden modellabhängig).

d) **Leptonenzahl**: Experimentell ergibt sich, dass Leptonen und Antileptonen immer paarweise, “assoziert”, produziert werden. Das legt nahe, den Leptonen eine ladungsartige Quantenzahl, die Leptonzahl, und Antileptonen das Negative davon zuzuordnen. Die Gesamtleptonzahl eines Systems, die Summe der Leptonzahlen bleibt erhalten. Bis vor kurzer Zeit hätte man gesagt, dass jede Leptonfamilie ihre eigene, getrennt erhaltene Quantenzahl hat:  $L_e$ ,  $L_\mu$ ,  $L_\tau$ .

$$\begin{array}{c|cccccc|cccccc}
 & e^- & \nu_e & \mu^- & \nu_\mu & \tau^- & \nu_\tau & e^+ & \bar{\nu}_e & \mu^+ & \bar{\nu}_\mu & \tau^+ & \bar{\nu}_\tau \\
 L_e & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 L_\mu & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
 L_\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
 \end{array}$$

Die Beobachtung sogenannter Neutrinooszillationen, das heisst die Umwandlung einer Neutrinoart in eine andere, besagt, dass die Leptonzahlen für die einzelnen Familien (“Leptonflavour-Zahl”) nicht exakt erhalten ist. Der Effekt

ist allerdings so klein, dass eine Verletzung der Leptonflavour-Erhaltung bisher nur bei Neutrinooszillationen beobachtet wurde, insbesondere nicht für Prozesse, die geladene Leptonen enthalten. Das klassische Beispiel ist der  $\beta$ -Zerfall des Neutrons:

$$n \rightarrow p \quad e^- \quad \bar{\nu}_e$$

$$L_e : \quad 0 \quad \quad 0 \quad +1 \quad -1$$

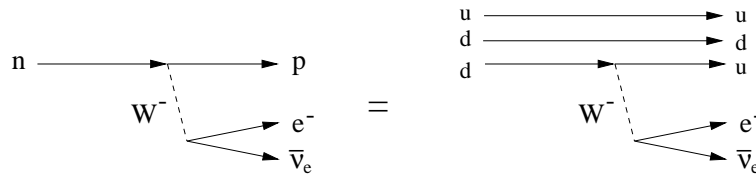


Abbildung 4.1: Diagramm des Neutronzerfalls, rechts als Quarkdiagramm aufgelöst.

Ein anderes Beispiel ist der  $\mu$ -Zerfall, bei dem zwei Leptonfamilien auftreten:

$$\mu^- \rightarrow e^- \quad \bar{\nu}_e \quad \nu_\mu$$

$$L_e : \quad 0 \quad \quad +1 \quad -1 \quad 0$$

$$L_\mu : \quad +1 \quad \quad 0 \quad 0 \quad +1$$

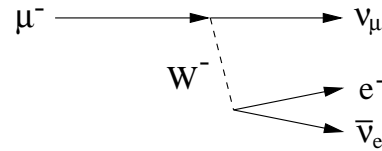


Abbildung 4.2: Diagramm des Myonzerfalls.

Der folgende Zerfall (‘radiativer  $\mu$ -Zerfall’) ist bisher nicht beobachtet worden, obwohl alle anderen Erhaltungssätze erfüllt wären:

$$\mu^- \rightarrow e^- \quad \gamma$$

$$L_e : \quad 0 \quad \quad +1 \quad 0$$

$$L_\mu : \quad +1 \quad \quad 0 \quad 0$$

Man kann sich klarmachen, dass dieser Zerfall grundsätzlich auftreten kann, wenn Elektronneutrinos in Myonneutrinos übergehen können (wie sieht der entsprechende Graph aus?).

Beim  $\mu$ -Zerfall treten nur Leptonen auf, man nennt das einen leptonischen Zerfall. Beim Zerfall des Neutrons treten sowohl Leptonen als auch Hadronen auf, man nennt das – je nach Sichtweise – einen semi-leptonischen oder semi-hadronischen Zerfall.

Die entsprechenden Quantenzahlen für die Quarks, die Flavour-Quantenzahlen, sind in der schwachen Wechselwirkung nicht erhalten: Im  $\beta$ -Zerfall des Neutrons zum Beispiel geht ein  $n = |udd\rangle$  in ein  $p = |uud\rangle$  über, das heißt ein  $d$ -Quark in ein  $u$ -Quark.

- e) **Colour:** es gibt drei Ladungen der starken Wechselwirkung (rot, grün, blau), die absolut erhalten sind (wird im nächsten Kapitel behandelt).

- f) **CPT**: Invarianz der Naturgesetze gegenüber gleichzeitiger Teilchen-Antiteilchen-Vertauschung (C), räumliche (P) und zeitliche (T) Spiegelung. Aus dem sogenannten CPT-Theorem folgt, daß Massen und Lebensdauern von Teilchen und Antiteilchen gleich sein müssen (hier ohne Beweis). In der schwachen Wechselwirkung sind die C-, P-, T-Invarianzen einzeln verletzt (siehe Abschnitt 4.5).

## 4.2 Symmetrien, Transformationen und Erhaltungssätze

### 4.2.1 Invarianz der Hamilton-Funktion

a) **Klassisch**: Die Hamilton-Funktion  $H(p_i, q_i)$  für  $n$  Massenpunkte ( $i = 1, \dots, 3n$ ;  $p_i, q_i$  sind die Impuls- und Ortskoordinaten) entspricht der Gesamtenergie des Systems:

$$H = T + V \quad (4.2)$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (4.3)$$

Der erste Term beschreibt die Kräfte, der zweite die Geschwindigkeiten. Am Beispiel eines Massepunktes im Erdfeld ergibt sich:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + m \cdot g \cdot z \quad (4.4)$$

$$\dot{p}_{x,y} = 0, \quad \dot{p}_z = -mg, \quad \dot{q}_i = p_i/m$$

Wir betrachten eine Hamilton-Funktion (der Einfachheit halber im Eindimensionalen), die gegenüber Translationen des Bezugssystems invariant bleibt. Die Translation sei (zur Vereinfachung schreiben wir  $x, y, z$  statt  $q$ ):

$$\begin{aligned} x_i &\rightarrow x_i + \delta x_i, & \delta x_i &= \delta x \quad \forall i \\ y_i &\rightarrow y_i + \delta y_i, & \delta y_i &= \delta y \quad \forall i \\ z_i &\rightarrow z_i + \delta z_i, & \delta z_i &= \delta z \quad \forall i \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dabei können die  $\delta x, \delta y, \delta z$  unabhängig gewählt werden. Die Änderung von  $H$  ist:

$$\delta H = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x + \frac{\partial H}{\partial y_i} \delta y + \frac{\partial H}{\partial z_i} \delta z \right) = -\delta x \sum_i \dot{p}_{xi} - \delta y \sum_i \dot{p}_{yi} - \delta z \sum_i \dot{p}_{zi} \quad (4.6)$$

Wenn  $H$  invariant gegenüber dieser Transformation ist, das heißt  $\delta H = 0$ , ergibt sich:

$$\sum_i \dot{p}_{xi} = 0 \Leftrightarrow \sum_i p_{xi} = \text{const.} \quad (4.7)$$

und entsprechend für die  $y, z$  Komponenten. Aus der Invarianz der Hamilton-Funktion gegenüber Translationen des Raumes folgt also die Erhaltung des Gesamtimpulses des Systems.

Entsprechend folgt aus der Invarianz der Hamilton-Funktion gegenüber Translationen der Zeit die Energieerhaltung.

**b) Quantenmechanisch:** In der Quantenmechanik wird die Hamilton-Funktion  $H$  zum Hamilton-Operator  $\mathbb{H}$ , der auf Energie-Eigenzustände  $\psi$  angewandt ergibt:

$$\mathbb{H}\psi = E\psi \quad (4.8)$$

Eine Transformation  $U$  wirkt wie folgt auf das System:

$$U(\mathbb{H}\psi) = U\mathbb{H}U^{-1}U\psi = \mathbb{H}' \cdot \psi' \quad (4.9)$$

Wenn  $\mathbb{H}$  invariant ist:

$$\mathbb{H}' = U\mathbb{H}U^{-1} = \mathbb{H} \quad \Rightarrow \quad U\mathbb{H} = \mathbb{H}U \quad \Rightarrow \quad [U, \mathbb{H}] = 0 \quad (4.10)$$

Das heißt, wenn  $\mathbb{H}$  unter der Transformation  $U$  invariant ist, vertauschen  $U$  und  $\mathbb{H}$  und können deshalb gemeinsame Eigenzustände haben. Allgemein gilt:

Zu jeder Transformation, die  $\mathbb{H}$  invariant läßt, gibt es einen Operator, dessen Eigenwerte erhalten sind.

Um die transformierte Wellenfunktion  $\psi'$  in (4.9) zu erhalten, fordern wir, dass der Wert von  $\psi'$  an der Stelle  $\vec{x}'$  gleich dem von  $\psi$  an der Stelle  $\vec{x}$  sein soll:

$$\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x}) \quad (U : \vec{x} \rightarrow \vec{x}'). \quad (4.11)$$

In dem ursprünglichen Koordinatensystem ergibt sich dann die transformierte Wellenfunktion zu

$$\psi'(\vec{x}) = \psi(U^{-1}\vec{x}), \quad (4.12)$$

wodurch  $\psi'$  definiert wird.

Als Beispiel betrachten wir den Operator für die räumliche Translation. Dieser Operator entspricht dem Impulsoperator, was wir uns folgendermaßen klarmachen: Unter einer infinitesimalen Translation

$$\delta U : \vec{x} \rightarrow \vec{x} + \delta\vec{x} \quad (4.13)$$

transformiert sich eine Wellenfunktion:

$$\psi(\vec{x}) \rightarrow \psi(U^{-1}\vec{x}) = \psi(\vec{x} - \delta\vec{x}) = \psi(\vec{x}) - \delta\vec{x} \cdot \nabla\psi(\vec{x}) = (1 - i\delta\vec{x}\vec{\mathbb{P}})\psi(\vec{x}). \quad (4.14)$$

Dabei wurde  $\nabla = i\vec{\mathbb{P}}$  benutzt. Eine endliche Translation

$$U(\Delta\vec{x}) : \vec{x} \rightarrow \vec{x} + \Delta\vec{x}, \quad \text{mit } \Delta\vec{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \delta\vec{x}, \quad (4.15)$$

läßt sich aus unendlich vielen infinitesimalen Translationen aufbauen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i\vec{\mathbb{P}}\delta\vec{x})^n = \exp(i\vec{\mathbb{P}}\Delta\vec{x}) = U(\Delta\vec{x}) \quad (4.16)$$

Die Operatoren  $\vec{\mathbb{P}} = (\mathbb{P}_x, \mathbb{P}_y, \mathbb{P}_z)$  nennt man die Generatoren der Translationsgruppe (zum Gruppenbegriff siehe unten). Da  $\mathbb{H}$  mit  $\vec{\mathbb{P}}$  kommutiert,  $[\mathbb{H}, \vec{\mathbb{P}}] = 0$ , gibt es gemeinsame Eigenzustände, die Impulszustände

$$\psi(\vec{x}) = \psi_0 \cdot \exp i(Et - \vec{p}\vec{x}), \quad (4.17)$$

und der Eigenwert, der Impuls, ist erhalten.

**Gruppen:** Mathematisch hat eine Transformation die Struktur einer Gruppe, die folgenden Axiomen genügt:

Eine Gruppe ist eine Menge  $\mathcal{G}$  mit einer Verknüpfung ( $\cdot$  oder  $+$ ) der Gruppenelemente mit folgenden Eigenschaften:

- $a \cdot b \in \mathcal{G} \quad \forall a, b \in \mathcal{G}$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathcal{G}$
- $\exists e$  (Einselement) :  $a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in \mathcal{G}$
- $\exists a^{-1}$  (Inverses) :  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e \quad \forall a \in \mathcal{G}$

Beispiele sind die ganzen Zahlen mit der Addition oder die rationalen Zahlen mit der Multiplikation. Auch Translationen oder Drehungen mit der Verknüpfung einer Hintereinanderausführung bilden eine Gruppe. Zwei Drehungen nacheinander ausgeführt sind äquivalent einer Gesamtdrehung. Die kontinuierlichen Drehungen entsprechen der Gruppe der orthogonalen Transformationen (im Dreidimensionalen die Gruppe  $O(3)$ ). Eine Gruppe kann aber auch diskrete Elemente haben, zum Beispiel Drehungen, die die 6-fach symmetrische Figur in Abb. 4.3 in sich selbst überführt.

Interessant ist, daß die Reihenfolge von zwei Translationen oder Drehungen in einer Ebene keine Rolle spielt (Abb. 4.4 oben). Man sagt dann, die Gruppe ist kommutativ oder abelsch. Drehungen im Dreidimensionalen dagegen sind nicht-kommutativ oder nicht-abelsch (Abb. 4.4 unten).

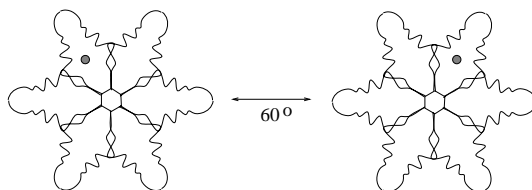
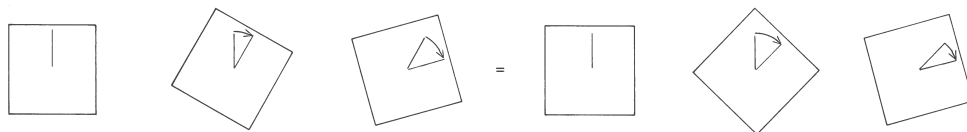


Abbildung 4.3: Diskrete Symmetrie eines Kristalls.

Abelsche Transformation



nicht-Abelsche Transformation

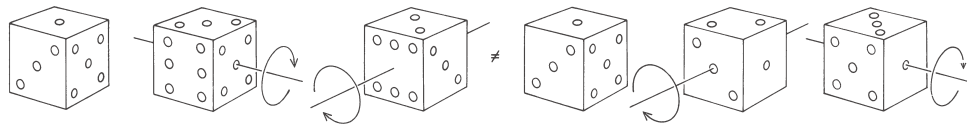


Abbildung 4.4: Die Abbildung zeigt anschaulich, daß Drehungen in der Ebene (oben) unabhängig von der Reihenfolge sind, während das im Dreidimensionalen (unten) allgemein nicht gilt.

## 4.3 Drehungen

### 4.3.1 Ganzzahlige Drehimpulse

Die Generatoren der Drehgruppe sind die Drehimpulsoperatoren  $\vec{\mathbb{L}} = (\mathbb{L}_x, \mathbb{L}_y, \mathbb{L}_z)$ :

$$\vec{\mathbb{L}} = \vec{x} \times \vec{p} = -i\vec{x} \times \vec{\nabla} \quad (4.18)$$

Wenn der Hamilton-Operator invariant gegenüber Drehungen ist, gibt es gemeinsame Eigenzustände zu  $\mathbb{H}$ ,  $\vec{\mathbb{L}}^2$  und  $\mathbb{L}_z$ . Die Drehimpulsoperatoren wirken nur auf die Winkelabhängigkeit der Wellenfunktion, ausgedrückt in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$ . Die Eigenfunktionen zu ganzzahligem Drehimpuls sind die Kugelflächenfunktionen  $Y_l^m(\theta, \phi)$  (siehe Review of Particle Physics [34]):

$$\vec{\mathbb{L}}^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m, \quad \mathbb{L}_z Y_l^m = m Y_l^m$$

Die Bedeutung der Drehimpulserhaltung in Teilchenreaktionen wollen wir uns an dem Beispiel des Zerfalls von  $\rho$ -Mesonen, die in 2 Pionen zerfallen, klarmachen: Die

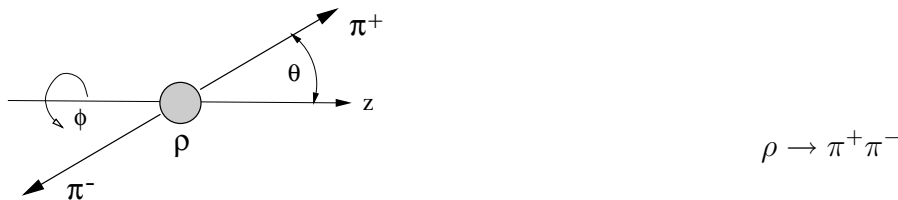


Abbildung 4.5:

Pionen haben Spin 0,  $\rho$ -Mesonen haben Spin  $J = 1$ . Nehmen wir an, die  $\rho$ -Mesonen seien mit  $J_z = +1$  in z-Richtung polarisiert. Dann müssen die  $\rho$ -Mesonen die Rotationseigenschaften von  $Y_1^1(\theta, \phi)$  haben. Drehimpulserhaltung bedeutet, daß auch die zwei Pionen im Endzustand diese Eigenschaft haben müssen. Da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion gegeben ist, ergibt sich die Winkelverteilung der Pionen:

$$|Y_1^1(\theta, \phi)|^2 = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta \quad (4.19)$$

Das heißt, die Pionen fliegen bevorzugt senkrecht zur z-Achse weg und die Verteilung ist unabhängig vom Azimutwinkel  $\phi$ .

Durch Analyse der Winkelverteilungen der Zerfallsprodukte eines Teilchens kann dessen Spin bestimmt werden.

### 4.3.2 Halbzahlige Drehimpulse

Experimentell hat man festgestellt, daß auch Zustände mit halbzahligem Spin auftreten (Stern-Gerlach-Experiment zur Bestimmung des Spins des Elektrons).

Wir wollen im folgenden den formalen Weg der Einführung halbzahlgiger Spins über die Darstellung von Gruppen skizzieren: Die Generatoren der Drehgruppe, die wir jetzt mit  $\vec{\mathbb{J}} = (\mathbb{J}_x, \mathbb{J}_y, \mathbb{J}_z)$  bezeichnen wollen ( $L$  soll weiterhin Bahndrehimpulse

bezeichnen), bilden eine ‘Lie-Algebra’<sup>1</sup>, die durch durch folgende Vertauschungsrelationen definiert ist:

$$[\mathbb{J}_i, \mathbb{J}_j] = \mathbb{J}_i \mathbb{J}_j - \mathbb{J}_j \mathbb{J}_i = i \epsilon_{ijk} \mathbb{J}_k \quad (4.20)$$

Dieser Ausdruck ist ungleich 0 für  $i \neq j$ , das heißt die Ausführung infinitesimaler Drehungen ist nicht-kommutativ (= nicht-abelsch). Man kann zeigen, daß  $\mathbb{J}^2$  mit allen Operatoren der Algebra vertauscht (= ‘Casimir-Operator’), also:

$$[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_i] = 0 \quad \text{für alle } i \quad (4.21)$$

$$[\mathbb{J}_i, \mathbb{J}_j] \neq 0 \quad \text{für } i \neq j \quad (4.22)$$

Damit ist die maximale Anzahl kommutierender Operatoren 2, zum Beispiel  $\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_z$ .

Die Eigenzustände zu  $\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_z$  bestimmen die ‘irreduziblen Darstellungen’  $|j, j_z\rangle$  der Drehgruppe:

$$\mathbb{J}^2 |j, j_z\rangle = j(j+1) |j, j_z\rangle \quad (4.23)$$

$$\mathbb{J}_z |j, j_z\rangle = j_z |j, j_z\rangle \quad (4.24)$$

Zu jedem  $j$  gehören  $2j+1$  Zustände mit unterschiedlichen  $j_z$ . Diese Zustände transformieren sich bei Drehungen untereinander ( $j$  bleibt fest wegen der Drehimpulserhaltung). Die Darstellung heißt ‘irreduzibel’, weil man auch mindestens die  $2j+1$  Zustände braucht.

Die Drehgruppe  $O(3)$  ist homomorph<sup>2</sup> zu der Gruppe  $SU(2)$ , der speziellen unitären Gruppe in 2 Dimensionen (‘speziell’ heißt hier, daß die Determinanten der Matrizen gleich 1 (und nicht -1) sind).

Die niedrigste Darstellung (Fundamentaldarstellung) der  $SU(2)$  hat  $j = 1/2$  mit  $2j+1 = 2$  Zuständen, die als 2-komponentige Spinoren dargestellt werden können:

$$|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Die beiden Spinoren sind die Basisvektoren der Fundamentaldarstellung. In dieser Darstellung werden die Drehimpulsoperatoren durch die Pauli-Matrizen (1.68) dargestellt:

$$\mathbb{J}_z = \frac{1}{2} \sigma_z \quad (4.27)$$

Die Operatoren  $\mathbb{J}^2$  und  $\mathbb{J}_z$  sind diagonal,  $\mathbb{J}^2$  ist ein Vielfaches der Einheitsmatrix und  $\mathbb{J}_z$  hat die Eigenwerte  $-j, -(j-1), \dots, j-1, j$  in der Diagonalen, für  $j = 1/2$ :

$$\mathbb{J}_z = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

<sup>1</sup>In einer Algebra sind zwei Verknüpfungen definiert, Multiplikation und Addition; der Name ‘Lie’ weist darauf hin, daß die zugrundeliegende Gruppe kontinuierlich ist.

<sup>2</sup>Ein Gruppen-Homomorphismus ist eine Abbildung einer Gruppe auf eine andere, die die Verknüpfungen erhält.



### 4.3.3 Kopplung von Drehimpulsen

In Systemen von Teilchen koppeln die einzelnen Drehimpulse (Eigen- und Bahndrehimpulse) zu einem Gesamtdrehimpuls, der die Rotationseigenschaften des Systems bestimmt. Die Zustände

$$|j_1, m_1\rangle, |j_2, m_2\rangle \quad (4.29)$$

koppeln zu dem neuen Zustand:

$$|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \quad (4.30)$$

Die  $(2j_1+1)(2j_2+1)$ -dimensionalen Darstellungsmatrizen zu diesen Zuständen erhält man durch das direkte Produkt ( $\otimes$ ) der Matrizen zu  $j_1$  und  $j_2$ . Diese können allerdings zerlegt werden in eine direkte Summe ( $\oplus$ ) von irreduziblen Darstellungen, die den möglichen Drehimpulskopplungen  $J$  mit  $J = |j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2$  entsprechen. Symbolisch kann man schreiben:

$$j_1 \otimes j_2 = |j_1 - j_2| \oplus |j_1 - j_2 + 1| \oplus \dots \oplus j_1 + j_2 - 1 \oplus j_1 + j_2 \quad (4.31)$$

Zum Beispiel können zwei Spin-1/2-Teilchen zum Gesamtspin 0 oder 1 koppeln:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1 \quad (4.32)$$

Die Zustände des gekoppelten Systems  $|JM\rangle$  erhält man durch Überlagerung der Zustände  $|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$ , für die  $M = m_1 + m_2$  gilt:

$$|JM, j_1 j_2\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = M}} |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | JM, j_1 j_2\rangle \quad (4.33)$$

Die Kopplung der einzelnen Drehimpulse zu einem neuen Gesamtdrehimpuls wird durch die Clebsch-Gordon-Koeffizienten  $\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | JM, j_1 j_2\rangle$  festgelegt. Die Clebsch-Gordon-Koeffizienten sind in folgender Form tabelliert zu finden (siehe zum Beispiel Review of Particle Physics [34]):

$j_1 \otimes j_2$	$J$
	$M \quad \dots\dots\dots$
$m_1 m_2$	Koeffizienten (ohne $\sqrt{\quad}$ )
·	
·	
·	
·	

Für unser obiges Beispiel  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$  findet man:

$$\begin{aligned}
 J = 0, M = 0: \quad |00, \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle \\
 J = 1, M = \pm 1: \quad |1 \pm 1, \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle &= \left| \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right\rangle \\
 J = 1, M = 0: \quad |10, \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Man spricht hier von einer Zerlegung in Multipletts ('(2j + 1)-pletts'): zwei Spin-1/2-Teilchen können zu einem Singulett- oder Triplett-Zustand koppeln.

Jede höhere Darstellung kann durch Produkte der Fundamentaldarstellungen erzeugt werden:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \dots \otimes \frac{1}{2} = \dots \oplus \dots \oplus \dots \tag{4.35}$$

Diese Aussage spielt auch für den Aufbau der Hadronen aus Quarks eine Rolle. Es treten Hadronenmultipletts auf, die Darstellungen einer Symmetriegruppe sind.

## 4.4 Klassifikation von Symmetrien

### a) Raum-Zeit-Symmetrien:

Transformation	Erhaltungsgröße	Bemerkung
Translation des Raumes	$\vec{P}$ (abelsch)	kontinuierliche Transformationen
Translation der Zeit	$E$ (abelsch)	$\Rightarrow$ additive Quantenzahlen
Drehung	$\vec{J}$ (nicht-abelsch)	z. B.: $\vec{P}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$
Raumspiegelung	Parität $P$	diskrete Transformationen
Zeitumkehr	T-Parität	$\Rightarrow$ multiplikative Quantenzahlen z. B.: $P_{tot} = P_1 \cdot P_2$

**b) Innere Symmetrien:** Erhaltungsgrößen, die nicht mit Raum-Zeit-Symmetrien verbunden sind, kann man innere, abstrakte Symmetrien zuordnen. Ein Beispiel ist die Beobachtung der Erhaltung der Quark-Flavours (Up, Down, Strangeness, ...) in der starken Wechselwirkung, die zu dem Quarkmodell geführt hat (mathematisch: SU(3)-Symmetrie).

## 4.5 Die diskreten Symmetrien CPT

$$\begin{aligned}
 P: \quad \text{Raumspiegelung} \quad \vec{x} &\rightarrow -\vec{x} \\
 T: \quad \text{Zeitumkehr} \quad t &\rightarrow -t \\
 C: \quad \text{Ladungskonjugation} \quad \text{Teilchen} &\rightarrow \text{Antiteilchen: } Q \rightarrow -Q \text{ usw.}
 \end{aligned}$$

Diese Symmetrien waren zunächst als allgemein gültig angesehen worden. Die Entdeckung der Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung 1957 hat einen großen Einfluß auf die Entwicklung der Teilchenphysik gehabt.

### 4.5.1 Parität

Die Raumspiegelung ist eine uneigentliche Lorentz-Transformation ( $\det = -1$ ), die nur das Vorzeichen der Raumkomponente ändert:

$$x = (t, \vec{x}) \rightarrow x' = (t, -\vec{x}) \quad (4.36)$$

Unter einer Raumspiegelung transformieren sich physikalische Größen folgendermaßen:

Skalar S:	$S \rightarrow S$	Temperatur, Druck, ...
Pseudoskalar P:	$P \rightarrow -P$	Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
Vektor V:	$\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$	Impuls, Geschwindigkeit, ...
Axialvektor A:	$\vec{a} \rightarrow \vec{a}$	Kreuzprodukt $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$

Auf eine Wellenfunktion angewendet ergibt die Raumspiegelung oder Paritätsoperation:

$$\mathbb{P}\psi(\vec{x}, t) = \psi(-\vec{x}, t) \quad (4.37)$$

Für freie Teilchen gilt  $[\mathbb{H}, \mathbb{P}] = 0$ . Deshalb gibt es simultane Eigenfunktionen zu  $\mathbb{H}$  und  $\mathbb{P}$ . Die Eigenwerte von  $\mathbb{P}$  sind (abgesehen von einer freien Phase)  $P = \pm 1$  (= Parität):

$$\mathbb{P}(\mathbb{P}\psi(\vec{x})) = \mathbb{P}\psi(-\vec{x}) = \psi(\vec{x}) = P^2\psi(\vec{x}) \quad (4.38)$$

Die räumliche Konstellation eines Teilchensystems wird durch die relativen Bahndrehimpulse bestimmt, ausgedrückt durch die Kugelflächenfunktionen. Deren Spiegelungseigenschaften sind:

$$\mathbb{P}Y_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_l^m \quad (4.39)$$

Die P-Eigenwerte für freie Teilchen sind deren **Eigenparität**. Zum Beispiel hat das Photon  $P_\gamma = -1$ . Als Teilcheneigenschaften wird in den Tabellen immer Spin und Parität angegeben, zum Beispiel für das Photon  $J^P = 1^-$ . Mit diesen Quantenzahlen hat das Photon die Transformationseigenschaften eines Vektors. Ein Pion hat  $J^P = 0^-$  und hat damit die Transformationseigenschaften eines Pseudoskalars.

Für Teilchen–Antiteilchen kann man nur relative Paritäten angeben; für Fermion–Antifermion gilt:

$$P_f \cdot P_{\bar{f}} = -1 \quad (4.40)$$

und für Boson–Antiboson:

$$P_b \cdot P_{\bar{b}} = +1 \quad (4.41)$$

Bei Teilchensystemen multiplizieren sich die Eigenparitäten aller Teilchen (multiplikative Quantenzahl). Für die Parität des Systems spielen aber noch die räumlichen Konstellationen, gegeben durch die relativen Bahndrehimpulse, eine Rolle. Da

$$\mathbb{P}Y_l^m = Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_l^m \quad (4.42)$$

ist, trägt ein relativer Bahndrehimpuls  $l$  einen Faktor  $(-1)^l$  bei. In einem Zweiteilchensystem gilt dann:

$$P_{tot} = P_1 \cdot P_2 \cdot (-1)^l \quad (4.43)$$

Die Quantenzahlen des Pions  $J^P = 0^-$  kann man so verstehen, daß das Pion ein Fermion–Antifermion–System (u,d Quarks) mit Gesamtspin 0 und ohne relativen Bahndrehimpuls ist.

Um die negative Parität des Photons zu verstehen, erinnern wir uns, daß in Atomen elektrische Dipol-Übergänge, das entspricht der Emission oder Absorption eines Photons ohne relativen Bahndrehimpuls, den Bahndrehimpuls des Atoms um  $\Delta l = 1$  ändern und damit die Parität umkehren. Elektrische Dipol-Übergänge entsprechen der Emission oder Absorption eines Photons ohne relativen Bahndrehimpuls.

### 4.5.2 Ladungskonjugation

Der Ladungskonjugationsoperator  $\mathbb{C}$  vertauscht Teilchen und Antiteilchen und wechselt für alle ladungsartigen Quantenzahlen das Vorzeichen, zum Beispiel:

$$\mathbb{C} |e^-\rangle = \eta |e^+\rangle \quad (4.44)$$

Dabei ist  $\eta$  eine willkürliche Phase, die man üblicherweise zu  $\pm 1$  wählt.

Für Eigenzustände von  $\mathbb{C}$  müssen alle ladungsartigen Quantenzahlen  $Q = 0$  sein. C-Eigenzustände sind zum Beispiel  $\gamma$  und  $\pi^0$ , aber nicht  $\nu_e, \bar{\nu}_e$ , weil  $L_e \neq 0$ . Ähnlich wie bei der Parität argumentiert man, daß die C-Eigenwerte  $C = \pm 1$  sind.

Die C-Parität des Photons ist  $C_\gamma = -1$ . Das liegt daran, daß das Photon das Quant des elektromagnetischen Feldes ist, das von einer Ladung  $q$  erzeugt wird:

$$|\gamma\rangle \sim q A^\mu \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C} |\gamma\rangle \sim -q A^\mu \quad (4.45)$$

Da die C-Parität eine multiplikative Quantenzahl ist, ist die C-Parität eines System aus  $n$  Photonen  $(-1)^n$ . Da ein  $\pi^0$ -Meson in zwei Photonen zerfällt, folgt:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C} |\pi^0\rangle = + |\pi^0\rangle \quad (4.46)$$

In den Tabellen findet man:

$$J^{PC}(\pi^0) = 0^{-+} \quad \text{und} \quad J^{PC}(\gamma) = 1^{--} \quad (4.47)$$

Für Fermion–Antifermion–Systeme (zum Beispiel Positronium = gebundenes  $e^+e^-$ -System oder analog ‘Quarkonium’ = gebundenes Quark–Antiquark-System) mit Bahndrehimpuls  $L$  und Gesamtspin  $S$  ergibt sich die C-Parität zu:

$$C_{f\bar{f}} = (-1)^{L+S} \quad (4.48)$$

Das legt fest, ob das System in eine gerade oder ungerade Zahl von Photonen zerfallen kann. Für das  $\pi^0$  ist  $L + S = 0$ , also  $C = +1$ .

### 4.5.3 CP-Invarianz

Die Parität ist in schwachen Wechselwirkungen verletzt: Ein Neutrino (Lepton mit Spin 1/2) tritt nur mit Spin entgegengesetzt zum Impuls auf. Das definiert einen Drehsinn, eine linkshändige Schraube. Da Schrauben im Spiegel betrachtet den umgekehrten Drehsinn haben, bedeutet das eine Paritätsverletzung.

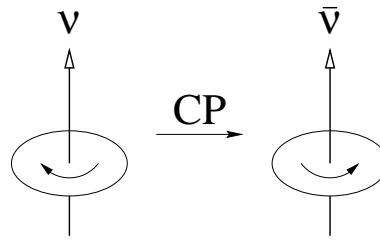


Abbildung 4.6: CP-Transformation für Neutrinos.

Den gespiegelten, rechtshändigen Schraubensinn haben aber die Anti-Neutrinos. Allgemein scheint es in der schwachen Wechselwirkung so zu sein, daß eine gleichzeitige Ausführung der P- und C-Operation die physikalischen Gesetze invariant läßt. Die Vermutung, daß wenigstens die CP-Invarianz allgemein gilt, ist allerdings 1967 experimentell in Systemen mit neutralen K-Mesonen widerlegt worden. Die CP-Verletzung ist allerdings sehr klein, von der Größenordnung  $10^{-9}$  der CP-erhaltenden Prozesse.

CP-Verletzung bedeutet eine Materie–Antimaterie–Asymmetrie und könnte der Grund für die Dominanz von Materie im Universum sein. Wegen dieser fundamentalen Bedeutung ist das Verständnis der CP-Verletzung heute eines der zentralen Forschungsthemen in der Teilchenphysik. Das Standardmodell sagte vorher, dass die CP-Verletzung in Systemen mit Bottom-Quarks ebenfalls auftreten sollte. Seit einigen Jahren wissen wir von den ‘B-Fabriken’ in USA und Japan, dass diese CP-Verletzung mit der vorhergesagten Stärke tatsächlich auftritt.

#### 4.5.4 Zeitumkehrinvarianz und CPT-Theorem

Nach einem auf relativ allgemeinen theoretischen Überlegungen basierenden Theorem ist CPT eine absolute Invarianz der Naturgesetze. Da aber CP nicht erhalten ist, folgt, daß auch die Zeitumkehrinvarianz verletzt sein muß. Allerdings ist in elementaren Prozessen bisher keine Verletzung der T-Invarianz direkt gemessen worden. Es wird weiter danach gesucht.

In makroskopischen Systemen ist es eher die Regel, daß Prozesse irreversibel, nicht zeitumkehrbar, sind. Das ist bekanntlich ein statistischer Effekt: Gasmoleküle, die sich zunächst in einer Hälfte eines Behälters befinden, haben das Bestreben sich zu verteilen. Obwohl es von den Naturgesetzen her erlaubt ist, daß nach einiger Zeit alle Moleküle wieder in einer Hälfte sind, werden wir das bei Systemen von der Größenordnung der Avogadro-Zahl  $N_A$  kaum erleben.

In der Teilchenphysik ist der Wirkungsquerschnitt für eine Reaktion  $a+b \rightarrow c+d$  gegeben durch den Flußfaktor  $\Phi(a, b)$ , der von den einlaufenden Teilchen abhängt, dem Matrixelement  $M_{fi}$ , das die Dynamik des Prozesses enthält, und den Phasenraum des Endzustandes  $PS(E_{tot}, c, d)$  (und eventuell einen statistischen Faktor für die möglichen Drehimpulszustände):

$$d\sigma(a + b \rightarrow c + d) = \Phi(a, b) \cdot M_{fi}(a + b \rightarrow c + d) \cdot dPS(E_{tot}, c, d) \quad (4.49)$$

Für den Umkehrprozess lautet der Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma(c + d \rightarrow a + b) = \Phi(c, d) \cdot M_{fi}(c + d \rightarrow a + b) \cdot dPS(E_{tot}, a, b) \quad (4.50)$$

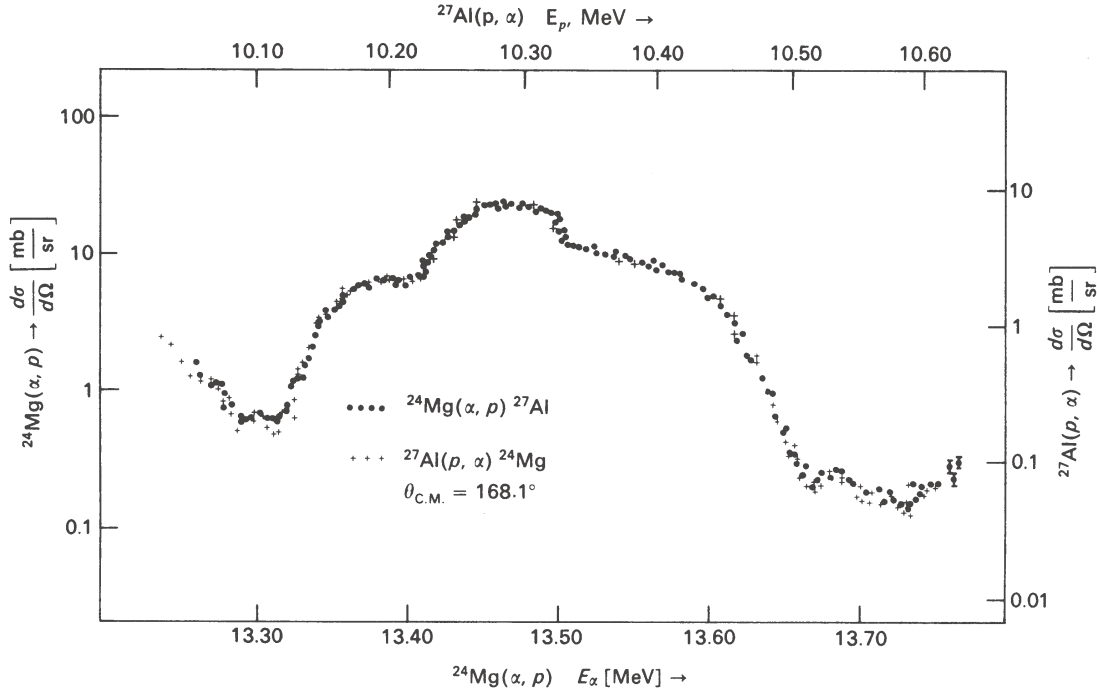


Abbildung 4.7: Test der Zeitumkehrinvarianz.

Diese Wirkungsquerschnitte sind im allgemeinen nicht gleich. Zeitumkehrinvarianz fordert nur, daß  $M_{fi}(a + b \rightarrow c + d) = M_{fi}(c + d \rightarrow a + b)$  ist. In Abb. 4.7 wird ein Test der Zeitumkehrinvarianz gezeigt, in dem beide Reaktionsrichtungen für



gemessen wurden.

Um T-Invarianz zu überprüfen, muß man observable Skalare messen, die bei Zeitumkehr ihr Vorzeichen ändern. Bei T-Invarianz müssen diese Skalare Null sein. In der folgenden Liste kann man die Wirkung der P- und T-Operationen auf verschiedene physikalische Größen sehen:

Größe	T	P
$\vec{x}$	$\vec{x}$	$-\vec{x}$
$\vec{p}$	$-\vec{p}$	$-\vec{p}$
$\vec{\sigma} = \vec{x} \times \vec{p}$	$-\vec{\sigma}$	$\vec{\sigma}$
$\vec{E}$	$\vec{E}$	$-\vec{E}$
$\vec{B}$	$-\vec{B}$	$\vec{B}$
$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$	$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$	$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$
$\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$	$-\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$	$-\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$

Die einzige ausgezeichnete Richtung für ein Elementarteilchen ist die Spinrichtung. Deshalb müsste ein von Null verschiedenes elektrisches Dipolmoment die Richtung des Spins haben:  $\vec{d}_e = EDM \cdot \vec{\sigma}/|\vec{\sigma}|$ . Die resultierende Energie des Dipols in

einem elektrischen Feld  $\vec{E}$  ist dann:

$$\Delta E = EDM \cdot \frac{\vec{\sigma}}{|\vec{\sigma}|} \cdot \vec{E} \quad (4.52)$$

Wenn T-Invarianz gilt, muß dieser Ausdruck Null sein, weil  $\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$  das Vorzeichen wechselt. Damit muß auch das elektrische Dipolmoment des Teilchens ( $EDM$ ) Null sein. Die besten Grenzen gibt es bisher für das Neutron

$$EDM(\text{Neutron}) < 0.63 \cdot 10^{-25} e \cdot \text{cm} \quad (90\% \text{ c.l.}). \quad (4.53)$$

Dabei ist ‘c.l.’ die Abkürzung für ‘confidence level’ und bedeutet die Wahrscheinlichkeit, daß die Grenze bei den gegebenen Meßergebnissen richtig ist. Die experimentelle Methode zur Bestimmung des Dipolmomentes wird ausführlich in Perkins [12] besprochen. Um die Präzision der Messung zu verstehen, kann man sich klar machen, daß das Ergebnis (4.53) einer Verschiebung von  $10^{-12}$  Elementarladungen ( $e$ ) über den Durchmesser des Neutrons entspricht.

Im Standardmodell, das heißt auf der Basis der bisher beobachteten CP-Verletzung in  $K$ - und  $B$ -Systemen, erwartet man  $EDM(\text{Neutron}) \approx 10^{-30} e \cdot \text{cm}$ , also noch weit entfernt von der Sensitivität der Experimente. Wenn man andererseits in dem jetzt zugänglichen Bereich einen Effekt messen würde, wäre das ein klarer Hinweis auf ‘Physik jenseits des Standardmodells’.

