

# Kapitel 2

## Die Entwicklung des Universums

### 2.1 Einführung

Die Frage nach dem Ursprung und der Entwicklung des Universums ist eng verknüpft mit den Fragen nach der Struktur der Materie und deren Verhalten unter extremen Bedingungen. Viele experimentelle Ergebnisse deuten darauf hin, dass sich das Universum in einem Urknall ('Big Bang') aus einem extrem heißen Feuerball entwickelt hat. Mit dem Urknall begann das Universum zu expandieren und durchlief dabei unterschiedliche Entwicklungsphasen beginnend bei höchsten Energien und Dichten.

Um die gegenwärtige Entwicklung des Universums zu beschreiben, spielt nur die Gravitation als Wechselwirkung eine Rolle, weil alle anderen Wechselwirkungen durch entgegengesetzte Ladungen auf makroskopischen Abständen neutralisiert sind. Das war in den ersten Sekunden nach dem Urknall anders: Das frühe Universum hat Phasen durchlaufen, in denen die Energien der Teilchen in dem Feuerball auftraten, die weit jenseits der uns mit Beschleunigern jemals zugänglichen Energien lagen. Durch das Verständnis der ersten Sekunden nach dem Urknall erhofft man sich Aufschluß über Fragen, die jenseits des Standardmodells der Teilchenphysik liegen, wie die 'Große Vereinheitlichung' (GUT), die Physik auf der Planck-Skala und, damit verbunden, die Vereinheitlichung der Gravitation mit den anderen Wechselwirkungen (Abb. 2.1 und Abb. 2.2).

Es gibt zu diesem Thema viel populärwissenschaftliche Literatur (u.a. S. Weinberg: 'Die ersten drei Minuten' [15], H. Fritzsche: 'Vom Urknall zum Zerfall' [16]). In der empfohlenen Literatur finden sich Beiträge zu diesem Thema insbesondere bei Schneider [13], Grupen in der englischen Fassung [4], Demtröder [8], Coles und Lucchin [11] und Klapdor-Kleingrothaus, Zuber [9].

### 2.2 Das Urknall-Modell

Noch Einstein hatte bei der Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie, der heute gängigen Theorie der Gravitation, angenommen, dass sich das Universum in einem statischen Zustand befindet. Mit der Entdeckung durch Hubble 1929, dass sich das Universum ausdehnt, hat sich das Urknall-Modell zum Standardmodell der Kosmologie entwickelt. Die wesentlichen experimentellen Stützpfeiler für dieses Modell sind:

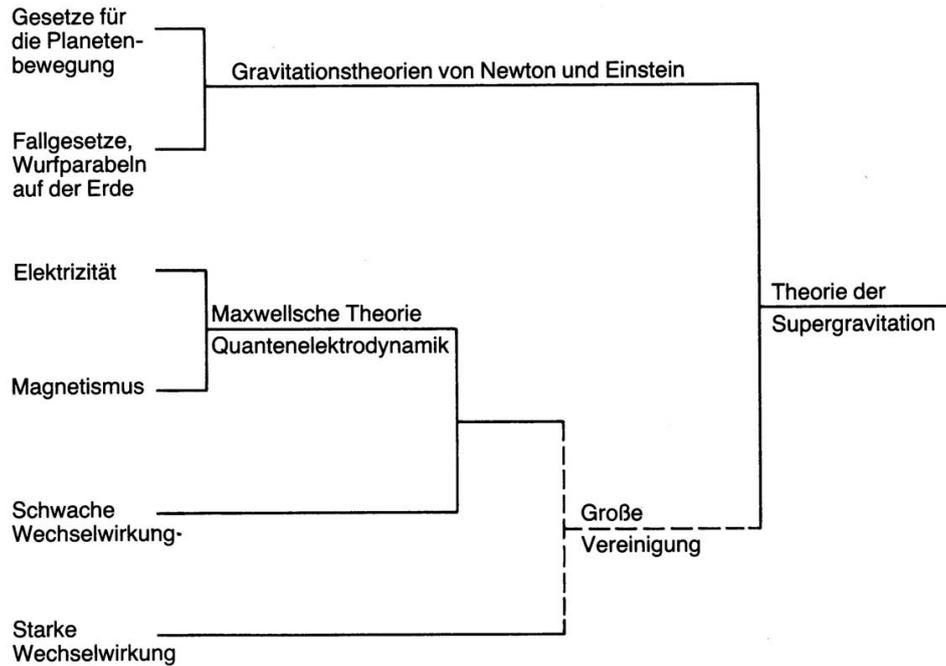


Abbildung 2.1: Die Vereinheitlichung der Wechselwirkungen: den Schritt zur Großen Vereinigung der starken und elektro-schwachen Wechselwirkung und schließlich deren Vereinigung mit der Gravitation hofft man aus einer Analyse der Entwicklung des frühen Universums bei sehr kleinen Abständen und hohen Energien zu verstehen.

- Die über die Rotverschiebung von Spektrallinien gemessenen Fluchtbewegungen von Galaxien, aus der Hubble die Expansion des Weltalls schloß.
- Die kosmische Hintergrundstrahlung ('3K-Strahlung'), die als die vom Urknall übriggebliebene und durch die Expansion abgekühlte Strahlung vorhergesagt (Gamov 1948) und auch entdeckt wurde (Penzias und Wilson, 1964).
- Die gemessene Häufigkeit der in den ersten vier Minuten nach dem Urknall erzeugten leichten Elemente stimmt über 10 Größenordnungen mit den Berechnungen nach dem Urknallmodell überein.

### 2.2.1 Die Metrik des gekrümmten Raums

Nach Einstein wird die Gravitation durch die Geometrie des Raumes beschrieben: die Massenverteilung im Universum erzeugt eine Krümmung des Raumes, der 'fallende' Körper auf Geodäten folgen. Unsere Beobachtungen zeigen, dass das Universum auf genügend großen Skalen homogen und isotrop ist, wie man am Beispiel der Verteilung von Galaxien (Abb. 2.3) oder der gemessenen Isotropie der 3K-Hintergrundstrahlung sieht. Aus der Homogenität und Isotropie folgt das **Kosmologische Prinzip**: für alle Beobachter, unabhängig von Ort und Beobachtungsrichtung, soll das Universum gleich aussehen. In diesem Fall muß der dreidimensionale Raum eine konstante Krümmung haben.

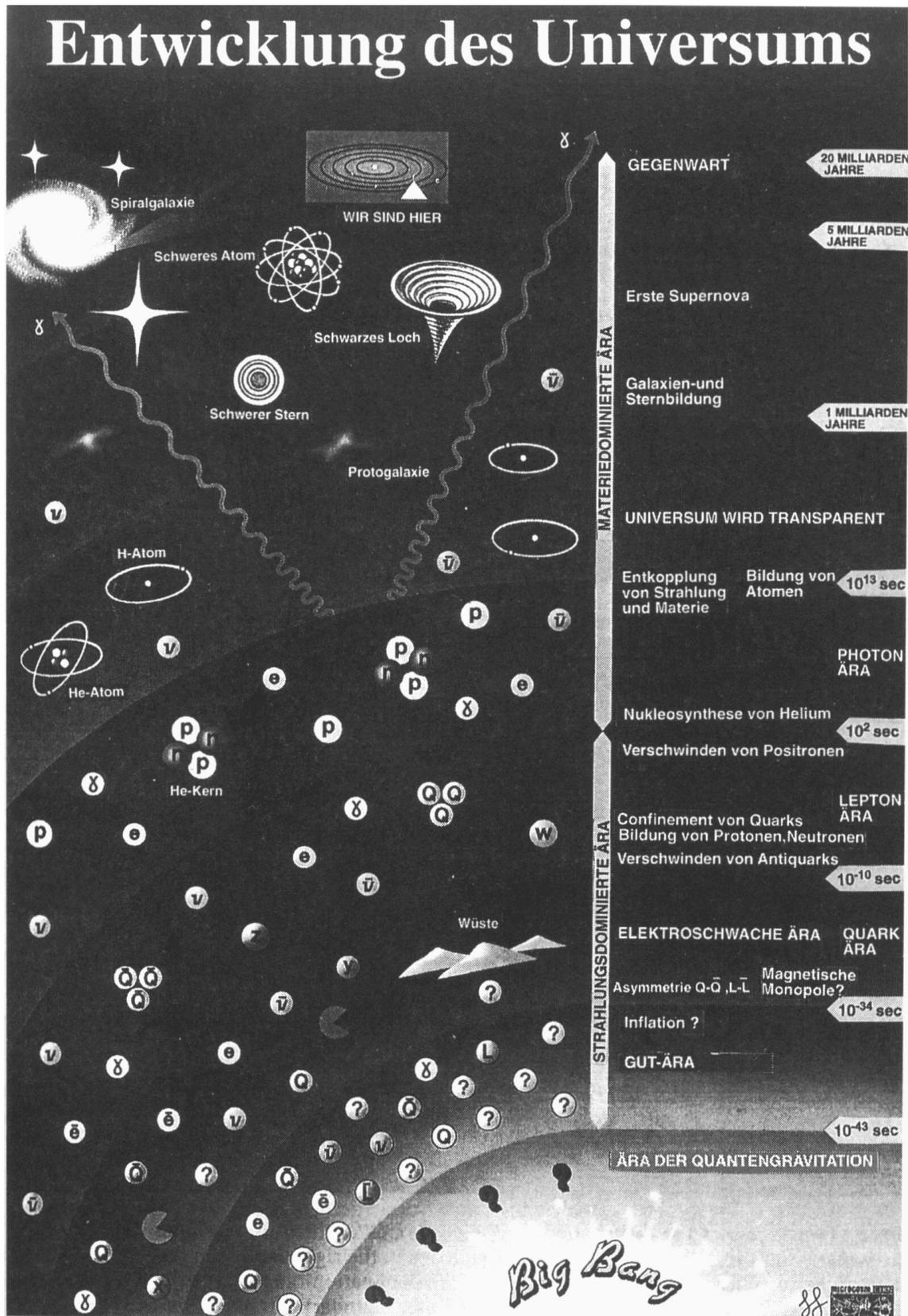


Abbildung 2.2: Die Entwicklung des Universums.

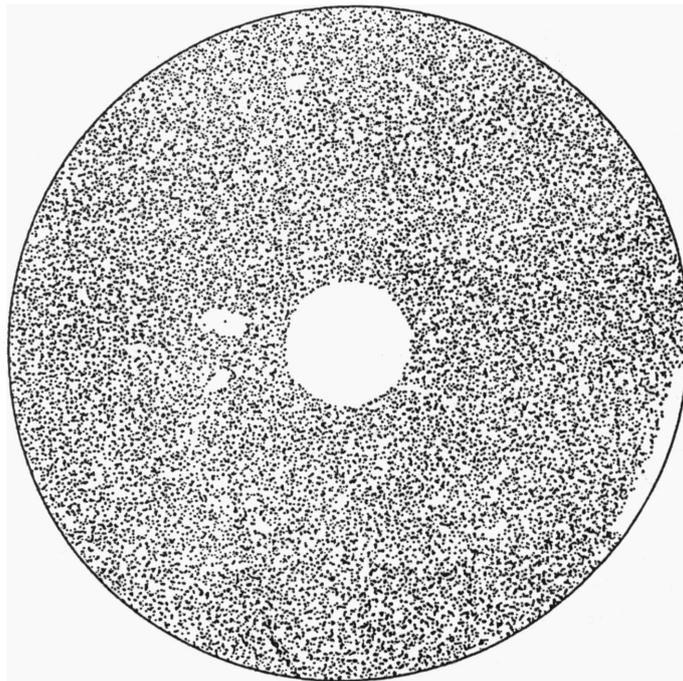


Abbildung 2.3: Die Verteilung von Radioquellen aufgenommen in einer Durchmusterung bei 6 cm Wellenlänge. In der Mitte ist der galaktische Nordpol, am Rand der galaktische Äquator.

**Robertson-Walker-Metrik:** Ein dreidimensionaler Raum positiver, konstanter Krümmung kann als Oberfläche einer Kugel in einem vierdimensionalen Raum aufgefasst werden:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2 = \text{konstant}, \quad (2.1)$$

analog der zweidimensionalen Oberfläche einer Kugel. Diese Analogie kann durchaus für ein anschauliches Verständnis des gekrümmten Raumes herangezogen werden, zum Beispiel: Wie die zweidimensionale Oberfläche einer Kugel im dreidimensionalen Raum keine Begrenzung, aber trotzdem eine endliche Fläche hat, so hat auch der durch (2.1) dargestellte dreidimensionale Raum keine Begrenzung, aber ein endliches Volumen. Der vierdimensionale Raum, in den wir die dreidimensionale Kugel eingebettet haben, hat keine reale Bedeutung, sondern wird hier nur als Konstruktionshilfe benutzt.

Den Kugelkoordinaten entsprechen im vierdimensionalen Raum drei Winkel und ein Radius:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (r, \psi, \theta, \varphi) \quad (2.2)$$

mit  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \psi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Punkte auf der Kugel haben die Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sin \psi \sin \theta \cos \varphi, \\ x_2 &= R \sin \psi \sin \theta \sin \varphi, \\ x_3 &= R \sin \psi \cos \theta, \\ x_4 &= R \cos \psi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Das Linienelement auf der dreidimensionalen ‘Kugeloberfläche’ ist:

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = d\ell_\psi^2 + d\ell_\theta^2 + d\ell_\varphi^2 \\ &= R^2 [d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ein Volumenelement in diesem dreidimensionalen Raum (definiert als Hyperfläche im vierdimensionalen Raum) ist durch das Produkt der Linienelemente (siehe Übungsaufgabe) gegeben:

$$dV = d\ell_\psi d\ell_\theta d\ell_\varphi \quad (2.5)$$

Nach Integration über den Wertebereich der Winkel (bei festem  $R$ ) ergibt sich das Volumen, das als Volumen des Universums zu interpretieren ist:

$$V = 2\pi^2 R^3 \quad (2.6)$$

Man kann nun eine Entfernung  $r'$  wie folgt einführen:

$$r' = R \sin \psi. \quad (2.7)$$

Daraus ergibt sich:

$$dr' = R \cos \psi d\psi = R \sqrt{1 - \sin^2 \psi} d\psi = R \sqrt{1 - (r'/R)^2} d\psi \quad (2.8)$$

Damit läßt sich die Koordinate  $\psi$  in dem Linienelement (2.4) eliminieren und man erhält:

$$d\ell^2 = \frac{dr'^2}{1 - r'^2/R^2} + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.9)$$

Der zweite Term in der letzten Zeile ist das Linienelement auf der zweidimensionalen Oberfläche einer dreidimensionalen Kugel mit dem Radius  $r'$ . Durch Integration der Flächenelemente  $dS = d\ell_\theta d\ell_\varphi = r'^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  über den Definitionsbereich der Winkel  $\theta$  und  $\varphi$  ergibt sich die gewohnte zweidimensionale Kugeloberfläche in einem dreidimensionalen Raum zu  $S = 4\pi r'^2$ .

Wir können das räumliche Linienelement in (2.9) mit dem Faktor  $R^2$  skalieren, um eine normierte, von der Expansion unabhängige Entfernung  $r$  durch  $r^2 = r'^2/R^2$  zu definieren. Der Skalierungsfaktor  $R^2$  wird positiv definiert und das mögliche Vorzeichen wird in einem Krümmungsparameter  $k$  absorbiert, der auf die Werte  $0, \pm 1$  eingeschränkt ist:

$$d\ell^2 = R^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right) \quad (2.10)$$

Dann ist  $r' = Rr$  der physikalische Radius,  $r$  der Koordinatenradius und der Raum hat die Krümmung  $k/R$ . Damit wurde die gesamte Dynamik der Expansion des Weltalls in die Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors  $R = R(t)$  gesteckt. Für  $R \rightarrow 0$ , das heißt, wenn wir uns in Richtung Urknall bewegen, werden alle Abstände klein,  $d\ell \rightarrow 0$ . Andererseits bleiben alle Strukturen, in Abständen  $r$  gemessen, gleich; das Universum skaliert nur.

Das vollständige Robertson-Walker-Linienelement legt die Raum-Zeit-Vermessung des Kosmos fest:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right) \quad (2.11)$$

Tabelle 2.1: Mögliche Raumkrümmung und Expansionsverhalten des Universums (ohne Berücksichtigung der “kosmologischen Konstanten”).

Typ	Geometrie	Krümmung	$\Omega = \rho/\rho_c$	Universum
$k = +1$	sphärisch	positiv	$> 1$	geschlossen
$k = 0$	euklidisch	keine (eben)	$= 1$	flach
$k = -1$	hyperbolisch	negativ	$< 1$	offen

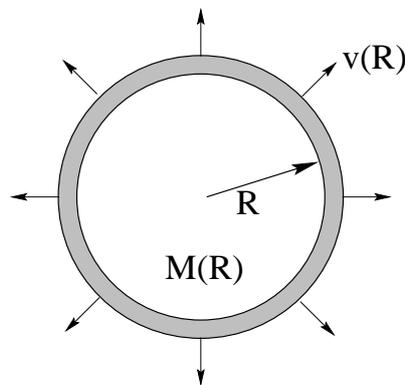


Abbildung 2.4: Zur Bestimmung der Gesamtenergie  $E = E_{kin} + E_{pot}$  einer expandierenden Kugelschale.

Die Koordinaten beziehen sich auf ein mitbewegtes Koordinatensystem, es wird kein Koordinatensystem bevorzugt.

Die Weltlinie eines Photons ist durch  $ds^2 = 0$  gegeben:

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \frac{dl}{dt} = c \quad (2.12)$$

### Expansion des Universums

Der Parameter  $k$  charakterisiert die Geometrie der Räume konstanter Krümmung (Tabelle 2.1) und die Krümmung bestimmt das Expansionsverhalten: für  $k = +1$  wird die Expansion mit der Zeit geringer und das Universum fällt wieder in sich zusammen, für  $k = -1$  expandiert das Universum ewig.

Wie sich unser Universum entwickeln wird, hängt von der Massen- oder Energiedichte ab<sup>1</sup> In Abb. 2.4 ist ein kugelförmiger Ausschnitt aus dem Universum gezeigt,

<sup>1</sup>Zu der Anwendbarkeit der hier benutzten Argumente der Newton’schen Mechanik siehe Seite 22.

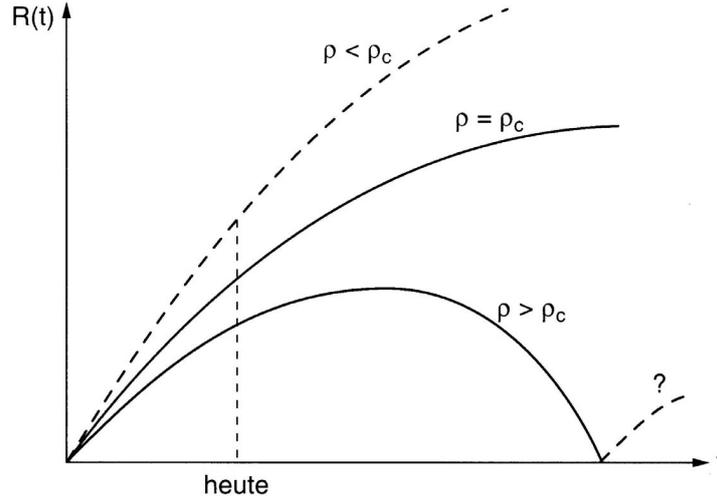


Abbildung 2.5: Zeitabhängigkeit des Skalenparameters  $R(t)$  für verschiedene Dichten relativ zur kritischen Dichte.

der homogen mit mittlerer Dichte  $\rho$  von Galaxien ausgefüllt ist. Der Radius der Kugel skaliert mit dem Skalenfaktor  $R$ , wie beim Aufblasen eines Luftballons. Deshalb ist in Abb. 2.4 ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Radius auf  $R$  gesetzt. Ein Beobachter im Zentrum der Kugel sieht, dass sich alle Galaxien mit einer Fluchtgeschwindigkeit  $v$  wegbewegen. Die Galaxien in der Kugelschale mit Radius  $R$  haben die Masse  $m = 4\pi R^2 dR \rho$  und bewegen sich mit der Geschwindigkeit

$$\dot{R} = v(R) = H \cdot R. \quad (2.13)$$

Diese Abhängigkeit der Fluchtgeschwindigkeit vom Radius wurde von Hubble gefunden ( $H$  = Hubble-Konstante). Damit ist die Gesamtenergie der Galaxien in der Kugelschale:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m H^2 R^2 - G \frac{m M(R)}{R} \quad (2.14)$$

Dabei ist  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} = 6.71 \cdot 10^{-39} \hbar c (\text{GeV}/c^2)^{-2}$  die Gravitationskonstante und

$$M(R) = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \quad (2.15)$$

die Masse innerhalb der Kugel. Damit erhält man für die Energie:

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \left( H^2 - \frac{8\pi G \rho}{3} \right) = \text{const} \quad (2.16)$$

Für  $E > 0$  überwiegt die kinetische Energie und das Universum wird sich immer ausdehnen; für  $E < 0$  wird es irgendwann aufgrund der Gravitation kollabieren. Der Umkehrpunkt bei  $E = 0$  entspricht einer kritischen Dichte  $\rho_c$ . Aus (2.16) erhält man:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.17)$$

Im allgemeinen ist für ein expandierendes Universum die Dichte und damit auch die Hubble-Konstante zeitabhängig (deshalb besser: Hubble-Parameter). Der klassi-

schen Gleichung (2.16) entspricht in der Allgemeinen Relativitätstheorie die Friedmann-Gleichung (für eine homogene, isotrope ideale Flüssigkeit):

$$H(t)^2 = \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - k \frac{c^2}{R^2} \quad (2.18)$$

Der Gesamtenergie in (2.16) entspricht der Krümmungsterm  $\sim 1/R^2$  mit dem Vorzeichenfaktor  $k$ , den wir weiter unten genauer betrachten. Die verschiedenen Lösungen für  $R(t)$  hängen von der Dichte relativ zur kritischen Dichte,

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.19)$$

ab. Die Verhältnisse sind in Abb. 2.5 dargestellt.

**Dichte des Universums:** Wenn man in (2.18)  $\rho = \Omega \cdot \rho_c$  einsetzt, ergibt sich:

$$H^2(\Omega - 1) = k \frac{c^2}{R^2}, \quad (2.20)$$

das heißt, das Vorzeichen von  $k$  ist durch  $\Omega \gtrless 1$  gegeben. In Tabelle 2.1 sind die drei Szenarien für die Entwicklung des Universums aufgelistet (zunächst hier ohne Berücksichtigung der ‘kosmologischen Konstante’, siehe Seite 22):

- $k = +1$ : Das Universum ist ‘geschlossen’, das heißt die Massendichte  $\rho$  ist so groß, dass die Gravitation die Expansion abbremst und das Universum wieder kollabiert. Das könnte zyklisch verlaufen wie in Abb. 2.5 für  $\rho > \rho_c$  angedeutet.
- $k = +0$ : Das Universum ist ‘flach’, die Metrik ist euklidisch. Die Expansionsgeschwindigkeit nimmt ab, es gibt aber keine Umkehr der Bewegung ( $E = 0$ ).
- $k = -1$ : Das Universum ist ‘offen’, es expandiert unendlich.

Die Frage, welches der Szenarien für unser Universum zutrifft, ist bis heute nicht beantwortet. Der heutige Wert von  $\Omega$  läßt sich durch Messung der Hubble-Konstante, die nach (2.17) die kritische Dichte festlegt, und der Massendichte im Weltall bestimmen. Der heutige Wert des Hubble-Parameters  $H_0$  ist [17]:

$$H_0 = 100 \cdot h_0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad \text{mit } h_0 = 0.73 \pm 0.03 \quad (2.21)$$

Die Unsicherheit in dem normierten Hubble-Parameter  $h_0$  hat sich in den letzten Jahren enorm verringert. Vor etwa 15 Jahren war der Hubble-Parameter noch nicht einmal auf einen Faktor 2 genau bekannt.

Hier wurde die in der Astronomie gebräuchliche Einheit 1 Parsec = 1pc = 3.262 Lichtjahre benutzt. Es folgt die kritische Dichte:

$$\rho_c = 18.8 \cdot h_0^2 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \approx 11 h_0^2 \text{ Protonen/m}^3 \quad (2.22)$$

Problematisch gestaltet sich die Bestimmung der heutigen Dichte  $\rho$ . Aus verschiedenen Beobachtungsmethoden ergeben sich teilweise widersprechende Werte für den Parameter  $\Omega = \rho/\rho_c$ :

Beobachtung	$\Omega_0$	$\Delta\Omega_0$
sichtbare Materie in Sternen und Galaxien	$< 0.01$	0.003 - 0.007
Dynamik von Galaxien (Anwendung des Virialsatzes):		
- Galaxien	0.06	0.02 - 0.10
- Doppelgalaxien	0.10	0.03 - 0.15
- Galaxienhaufen	0.25	0.15 - 0.35
Häufigkeit der primordialen Elemente	0.1	0.009 - 0.14
Dichte der Galaxien in großer Entfernung	0.9	0.4 - 1.6

Diese grob unterschiedlichen Ergebnisse scheinen auf ein grundsätzliches Problem hinzuweisen. Der Unterschied zwischen der sichtbaren und der aus der Galaxiendynamik bestimmten Materie hat zu der Hypothese geführt, dass es ‘dunkle Materie’ gibt, die nicht oder nur sehr schwach mit der übrigen Materie wechselwirkt. Dabei ist zu beachten, dass die ‘sichtbare Materie’ oder ‘baryonische Materie’ sowohl die leuchtende als auch die aus Absorptionsmessungen bestimmte nichtleuchtende Materie einbezieht. Wir glauben heute, dass die Dunkle Materie den größten Anteil an der gesamten Masse im All ausmacht. Wir kommen später noch einmal auf das Problem der Dunklen Materie zurück.

**Lösungen für  $R(t)$ :** Um die Friedmann-Gleichung (2.18) lösen zu können, benötigt man einen Ansatz für die zeitliche Entwicklung der Energiedichte  $\rho$ . Die Materie und Strahlung im Universum müssen thermodynamische Zustandsgleichungen erfüllen. Die Energiebilanz fordert, dass die Energieänderung in einem mitgeführten Volumenelement gleich dem negativen Produkt aus Volumenänderung und Druck ist:

$$d(\rho R^3) c^2 = -p d(R^3) \implies d\rho = -\frac{3}{R} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) \quad (2.23)$$

Für die Zustandsgleichung  $p = p(\rho)$  kann man zwei Grenzfälle betrachten (siehe Anhang B.1):

- **Strahlungsdominierte Phase:** Kurz nach dem Urknall war das Universum dicht und heiß und die Teilchenenergien sehr groß gegenüber den Massen. Die Zustandsgleichung für ein solches relativistisches Gas ist:

$$p = \frac{1}{3} \rho c^2 \stackrel{(2.23)}{\implies} \rho \sim R^{-4} \quad (2.24)$$

- **Materiedominierte Phase:** Das ist die Phase, in der wir uns zur Zeit befinden: die kalte, geklumpfte Materie übt keinen Druck aus. Die Zustandsgleichung ist dann annähernd:

$$p = 0 \stackrel{(2.23)}{\implies} \rho \sim R^{-3} \quad (2.25)$$

Die letzte Gleichung drückt einfach die Erhaltung der Energie in Form von Masse aus. Im Falle der Strahlungsdominanz kommt in (2.24) ein zusätzlicher Faktor  $1/R$  deshalb hinzu, weil die Quanten eine Rotverschiebung proportional  $R$  erfahren, was die Energiedichte zusätzlich herabsenkt.

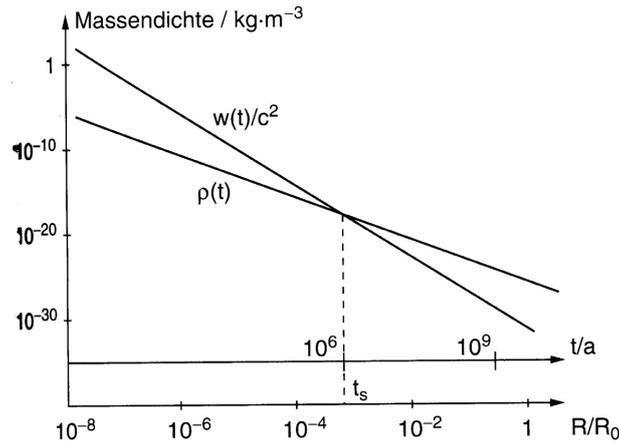


Abbildung 2.6: Massen- und Strahlungsdichte als Funktion der Zeit beziehungsweise des Skalenfaktors des expandierenden Universums.

Für ein flaches Universum ( $k = 0$ ) bekommt man dann in den beiden Fällen als Lösung der Friedmann-Gleichung (2.18):

$$\begin{aligned}
 R &\sim t^{\frac{1}{2}} && \text{strahlungsdominiert} \\
 R &\sim t^{\frac{2}{3}} && \text{materiedominiert} \\
 R &\sim t^{\frac{2}{3(1+w)}} && \text{allgemein mit } w = p/\rho
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

In Abb. 2.6 sind die Kurven für die Strahlungs- und Massendichten gezeigt. Etwa  $10^6$  Jahre nach dem Urknall sind beide Dichten etwa gleich. Das war auch etwa die Zeit, als sich Strahlung und Materie voneinander entkoppelten und sich getrennt voneinander entwickelten.

**Temperaturabhängigkeit der Strahlungsdichte:** Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz gilt für die Temperaturabhängigkeit der Strahlungsdichte:

$$\rho_s(T) \sim T^4. \tag{2.27}$$

Da andererseits nach (2.24)  $\rho_s(T) \sim R^{-4}$  gilt, ergibt sich die Relation:

$$T \sim 1/R \tag{2.28}$$

Damit läßt sich die Temperatur für jede frühere Ausdehnung des Universums angeben:

$$T(R) = (R_0/R) \cdot 2.7 \text{ K} \tag{2.29}$$

Dabei ist 2.7 K die heute gemessene Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung.

**Alter des Universums:** Aus den Lösungen  $R(t)$  läßt sich die heutige Zeit  $t_0$ , also das Alter des Universums, bestimmen. Da der Verlauf von  $R(t)$  von den Messungen der Hubble-Konstante und der Dichte abhängt, gehen deren Unsicherheiten auch in die Altersbestimmung ein (Abb. 2.7).

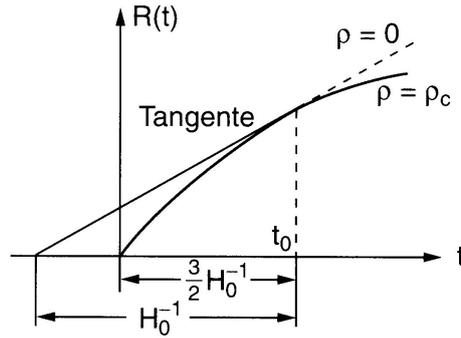


Abbildung 2.7: Abhängigkeit der Altersbestimmung von dem Verlauf der  $R(t)$ -Kurve.

Um ein quantitatives Gefühl für die experimentelle Unsicherheit der Altersbestimmung zu bekommen, betrachten wir zwei Spezialfälle. Wir beginnen mit einem masselosen Universum ( $\rho = 0$ ,  $\Omega = 0 \Rightarrow k = -1$ ), für das aus der Friedmann-Gleichung (2.18) folgt:

$$H(t) R = \dot{R} = \sqrt{-k} c = c \Rightarrow R = ct \quad (2.30)$$

Daraus ergibt sich die sogenannte Hubble-Zeit für das Alter des Universums:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \approx 13.4 \cdot 10^9 \text{ Jahre} \quad (2.31)$$

Für eine höhere Massendichte ergibt sich ein geringeres Alter, wie man aus Abb. 2.7 entnehmen kann. Dazu betrachten wir als weiteres Beispiel ein flaches ( $k = 0$ ), materiedominiertes Universum. Die Annahme der Materiedominanz ist keine wesentliche Einschränkung, weil die strahlungsdominierte Phase relativ kurz ist. Nach den Gleichungen (2.17, 2.25) ergibt sich dann für die Dichte ( $a = 8\pi G/3$ ):

$$\rho = \rho_c = H^2/a = C_m/R^3 \quad (2.32)$$

Dabei ist  $C_m$  eine Konstante, die die Energieerhaltung in Form von Masse festlegt. Die Lösung von (2.18),

$$R(t) = \left( \frac{9}{4} a C_m t^2 \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.33)$$

kann in (2.32) eingesetzt werden:

$$\rho = C_m/R^3 = \frac{4}{9} \frac{C_m}{a C_m t^2} = \frac{1}{a} H^2 \quad (2.34)$$

Daraus ergibt sich für diesen Fall des flachen, materiedominierten Universums

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0}. \quad (2.35)$$

Das Alter des Universums wird heute am genauesten durch die Analyse der Mikrowellen-Hintergrundstrahlung festgelegt [17]:

$$t_0 = (13.73 \pm 0.15) \cdot 10^9 \text{ Jahre} \quad (2.36)$$

**Bemerkungen zu der Ableitung der Friedmann-Gleichung (2.18):** Die Friedmann-Lemaître-Gleichungen sind Lösungen der Einstein-Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie für eine homogene und isotrope ideale Flüssigkeit mit Energiedichte  $\rho c^2$  und Druck  $p$ :

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + 3\frac{p}{c^2} \right) R \quad (2.37)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} R^2 - k c^2 \quad (2.38)$$

Die zweite Gleichung entspricht der vorher hergeleiteten Gleichung (2.18). Die erste folgt aus der zweiten Gleichung, wenn man die Energiebilanzgleichung (2.23) berücksichtigt.

In der Ableitung der Friedmann-Gleichung (2.18) hatten wir Argumente der Newton'schen Mechanik benutzt. Die Rechtfertigung im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie basiert auf dem Birkhoff'schen Theorem (siehe Lehrbücher der Kosmologie, zum Beispiel [11]): Eine sphärisch symmetrische Massenverteilung in einem leeren Raum wird außerhalb der Verteilung durch die Metrik eines Massenpunktes in einem leeren Raum beschrieben (Schwarzschild-Metrik). Das entspricht ganz der Aussage der Newton'schen Mechanik, dass das Feld einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung nach außen wie eine im Zentrum konzentrierte Masse wirkt. In beiden Fällen gilt, dass sich innerhalb einer mit der Verteilung konzentrischen Kugel alle Kräfte von Massen außerhalb der Kugel aufheben.

Für die Aufstellung der Energiegleichung (2.14) benutzen wir dann eine Kugel mit Radius  $l$ , der mit  $R$  skaliert:

$$l = \frac{R}{R'} l' \quad (2.39)$$

Wegen dieses Zusammenhanges ergibt sich bei Einsetzen des Kugelradius  $l$  und nach entsprechender Reskalierung von  $k$  auf die Werte  $0, \pm 1$  die Differentialgleichung (2.18) für  $R(t)$ .

Für den Newton'schen Ansatz ist es noch notwendig, dass der Radius der Kugel viel größer als der Schwarzschild-Radius ist. Der Schwarzschild-Radius,  $r_S = \frac{2MG}{c^2}$ , ist der Radius um einen Punkt der Masse  $M$ , innerhalb dessen auf Grund der Gravitation kein Licht nach außen dringen kann ('schwarzes Loch').

**Die kosmologische Konstante:** Die Lösungen  $R(t)$  der Friedmann-Gleichungen beschreiben mit den heutigen Parametern immer ein expandierendes Universum. Die Friedmann-Gleichung (2.37) zeigt außerdem, dass die Beschleunigung der Expansion immer negativ ist, dass also die Expansion durch die Gravitation abgebremst wird, wenn Dichte und Druck nicht negativ werden können. Um ein statisches Universum beschreiben zu können, hatte Einstein 1916 die sogenannte kosmologische Konstante  $\Lambda$  in seine Gleichungen eingeführt. Der Effekt dieser Konstanten kann als 'negativer Druck des Vakuums' oder als 'Anti-Gravitation' interpretiert werden. Die kosmologische Konstante kann in die Friedmann-Gleichungen (2.37, 2.38) eingeführt werden, indem die Dichte und der Druck wie folgt modifiziert werden:

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \rho + \rho_{\text{Vakuum}} = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \\ p &\rightarrow p + p_{\text{Vakuum}} = p - c^2 \frac{\Lambda}{8\pi G} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Nachdem in den 1920er Jahren die Expansion des Weltalls beobachtet worden war, hatte Einstein die Einführung der kosmologischen Konstante als den größten Fehler seines Lebens bezeichnet. Auch wir würden diese Konstante hier nicht mehr erwähnen, hätte sie nicht in den letzten Jahren wieder an Aktualität gewonnen. Die Homogenität des Weltalls ist in dem gerade dargestellten Modell der Kosmologie nicht zu verstehen, weil das heute beobachtbare Universum bei Extrapolation auf frühere Zeiten irgendwann nicht mehr kausal zusammenhängt ('Horizontproblem'). Man versucht heute diese Beobachtung durch eine Phase exponentiell schneller Expansion im frühen Universum zu erklären (siehe Abschnitt 2.3: 'Inflation'). Eine beschleunigte Expansion kann durch  $\Lambda \neq 0$  beschrieben werden.

In die Friedmann-Gleichung (2.20) geht dann die gesamte Energiedichte von Strahlung, Materie und Vakuumenergie, normiert auf die kritische Dichte, ein:

$$\Omega_{tot} = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{\rho_s}{\rho_c} + \frac{\rho_m}{\rho_c} + \frac{\rho_v}{\rho_c} = \Omega_s + \Omega_m + \Omega_v \quad (2.41)$$

### 2.2.2 Entwicklungsphasen des frühen Universums

Mit der adiabatischen Expansion des Universums ist eine Abkühlung verbunden. Wie wir im vorigen Abschnitt gezeigt haben, sind im frühen, strahlungsdominierten Universum Zeit, Ausdehnung, Temperatur und Energiedichte miteinander wie folgt verknüpft:

$$t \sim R^2 \sim \frac{1}{T^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (2.42)$$

Im thermischen Gleichgewicht sind die mittleren Teilchenenergien durch die Temperatur gegeben:

$$E = kT \quad \text{mit } k = 8.6 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K} \quad (2.43)$$

Thermisches Gleichgewicht wird erreicht, wenn die Reaktionsgeschwindigkeiten groß gegenüber der Expansionsgeschwindigkeit sind. Die mittlere Reaktionsrate pro Teilchen für einen Prozess mit einem Wirkungsquerschnitt  $\sigma$ , Teilchendichte  $n$ , Teilchengeschwindigkeit  $v$  ist:

$$\Gamma = n \langle \sigma v \rangle \quad (2.44)$$

Wenn diese Rate kleiner wird als die Expansionsrate,

$$\Gamma < H, \quad (2.45)$$

entkoppeln sich die entsprechenden Teilchen aus dem Gleichgewicht. Bei Neutrinos passiert das zum Beispiel wegen des mit der Energie fallenden Wirkungsquerschnittes unterhalb einer Temperatur von  $10^{10}$  K. Für Erzeugungsprozesse müssen Energien oberhalb der erzeugten Massen zur Verfügung stehen.

Die Tabelle 2.2 und die Abb. 2.8 geben einen Überblick über die Entwicklungsphasen des Universums (siehe auch Abb. 2.2), die im folgenden erläutert werden.

- $t = 10^{-44}$  s,  $E = 10^{19}$  GeV:

Die Energie entspricht der Planckmasse:

$$M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{19} \text{ GeV} \quad (2.46)$$

Tabelle 2.2: Phasen der kosmologischen Entwicklung.

$t$ [s]	$E$ [GeV]	$T$ [K]	$R$ [m]	
$10^{-44}$	$10^{19}$	$10^{32}$	$10^{-5}$	Planckzeit, $\lambda_{Compton} \approx r_S$
$10^{-36}$	$10^{15}$	$10^{28}$	$10^{-2}$	$E \approx M_X$ , GUT-Symmetrie-Brechung, Baryogenese
$10^{-10}$	$10^2$	$10^{15}$	$10^{12}$	$E \approx M_W$ , $SU(2)_L \times U(1)$ -Symmetrie-Brechung
$10^{-6}$	$10^0$	$10^{13}$	$10^{14}$	Quark-Confinement, $p\bar{p}$ -Annihilation
$10^0$	$10^{-3}$	$10^{10}$	$10^{17}$	Neutrinos entkoppeln, $e^+e^-$ -Annihilation
$10^2$	$10^{-4}$	$10^9$	$10^{18}$	Bildung leichter Kerne (Nukleosynthese)
$10^{12}$	$10^{-9}$	$10^4$	$10^{23}$	Photonen entkoppeln, Übergang von Strahlungs- zu Materie-Dominanz, Bildung von Atomen, Sternen, Galaxien
$10^{17}$	$10^{-13}$	$10^0$	$10^{26}$	Bildung des Sonnensystems und von organischem Leben, heute ( $t_0 \approx 2 \cdot 10^{10}$ Jahre)

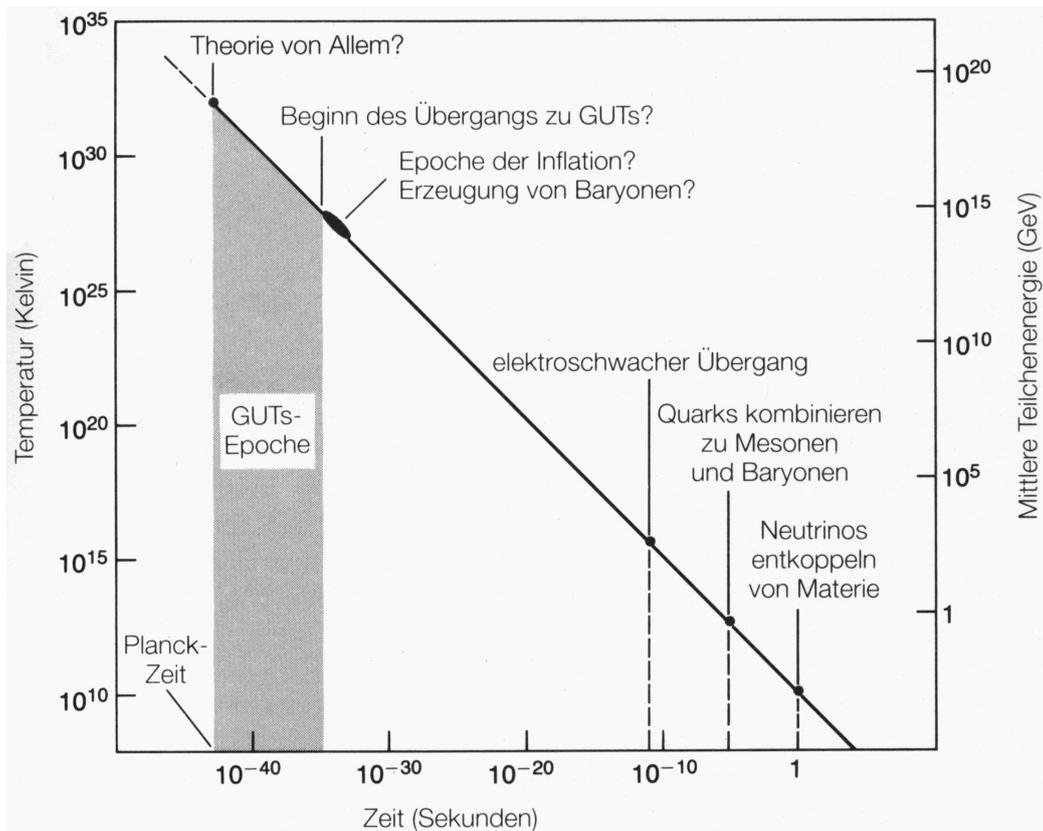


Abbildung 2.8: Elementarteilchenphysik im frühen Universum.

Die entsprechend charakteristische Länge ist die Compton-Wellenlänge eines Teilchens mit der Planck-Masse,

$$L_{Pl} = \frac{\hbar}{M_{Pl}c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35} \text{ m}, \quad (2.47)$$

und eine charakteristische Zeit ist

$$t_{Pl} = \frac{L}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 10^{-44} \text{ s}. \quad (2.48)$$

Auf der Skala, die jeweils durch eine dieser Größen gegeben ist, werden Quanteneffekte auch für die Gravitation wesentlich. Da aber die Gravitation in der Allgemeinen Relativitätstheorie durch die Geometrie des Raumes beschrieben wird, könnte es sein, dass auf dieser Skala Raum und Zeit quantisiert sind. Allerdings gibt es bisher keine Quantentheorie der Gravitation. String-Theorien könnten dafür den theoretischen Rahmen zu liefern

Die Bedeutung der Planck-Skala kann man sich auf verschiedene Arten klar machen. Die Gravitationsenergie einer Masse von der Größe der Planck-Masse, die über eine Ausdehnung von etwa der Compton-Wellenlänge verteilt ist, ist etwa gleich der Ruhemasse:

$$M_{Pl}c^2 = \frac{GM_{Pl}^2}{L_{Pl}} \quad (2.49)$$

Eine andere Aussage ist, dass die Compton-Wellenlänge eines Teilchens mit der Planck-Masse etwa gleich dem Schwarzschild-Radius dieser Masse ist:

$$r_S(M_{Pl}) = 2GM_{Pl}/c^2 = 2L_{Pl}. \quad (2.50)$$

Das heißt, das Teilchen zieht sich selbst in ein schwarzes Loch (!?)

- $t = 10^{-36} \text{ s}, E = 10^{15} \text{ GeV}$ :

Das ist die Skala, die GUT-Skala, auf der eine Vereinheitlichung der elektroschwachen mit der starken Wechselwirkung erwartet wird. Die erwartete Symmetriegruppe der Vereinigung hat zusätzliche Austauschbosonen  $X$ , die eine Masse  $M_X \approx 10^{15} \text{ GeV}$  haben. In der Zeit vor der GUT-Zeit waren die Energien so hoch, dass Massen keine Rolle spielten, alle fundamentalen Teilchen – Quarks, Leptonen, Bosonen – konnten erzeugt und vernichtet werden. Es herrschte volle Symmetrie. Bei Erreichen der GUT-Skala konnten dann  $X$ -Bosonen nicht mehr erzeugt werden, sondern konnten sich nur noch gegenseitig vernichten. Die GUT-Symmetrie war gebrochen.

In dieser Phase könnte die Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie, die sogenannte Baryogenese, ihren Ursprung haben. Nach A. Sacharow sind dazu drei Bedingungen notwendig:

1. Es muß einen Prozess geben, der die Baryonenzahl verletzt. Das ist in den GUT-Modellen gegeben, wie zum Beispiel der Protonzerfall  $p \rightarrow e^+ \pi_0$ .

2. Die CP-Invarianz muß verletzt sein: Dafür gibt es kein konkretes Modell, man kann sich aber CP-Verletzung ähnlich wie im Standardmodell vorstellen (die CP-Verletzung im Standardmodell scheint übrigens nicht auszureichen, um die Baryogenese zu erklären).
3. Die Prozesse dürfen nicht im thermischen Gleichgewicht verlaufen: Es ist gut möglich, dass bis zur GUT-Phase die Reaktionsraten klein gegen die Expansionsrate war.

- $t = 10^{-10} \text{ s}, E = 10^2 \text{ GeV:}$

Wir haben von der GUT-Zeit einen großen Zeitsprung gemacht, um etwa 26 Größenordnungen. Es gibt keine allgemein anerkannten Modelle, nach denen in dieser Zeit etwas besonderes passieren sollte. Man spricht manchmal über dieses Zeitintervall und dem entsprechenden Energieintervall als die ‘große Wüste’.

Auf der Zeitskala, auf der wir uns jetzt befinden, treten wir in den Energiebereich ein, der bereits experimentell erforscht ist. Ab hier können wir das Urknall-Modell testen und hoffen, auf die Zeit davor vielleicht einmal zurückschließen zu können.

Die Energie entspricht der Masse der  $W$ - und  $Z$ -Bosonen, die hier aus der ‘Ursuppe’ entkoppeln, die elektro-schwache Symmetrie wird gebrochen.

- $t = 10^{-6} \text{ s}, E = 1 \text{ GeV:}$

Die Energie erreicht die Skala der Massen der Nukleonen und der anderen Hadronen. Quarks und Gluonen gehen von einem Quark-Gluon-Plasma in die hadronischen, gebundenen Zustände über. Die hadronische Materie annihiliert in Photonen, es werden keine neuen Quark-Antiquark- oder Hadron-Antihadron-Paare erzeugt. Der Überschuß an Materie macht die heute beobachtete baryonische Materie aus. Das Verhältnis von Antibaryonen zu Baryonen ist heute experimentell

$$n_{\bar{B}}/n_B < 10^{-4} \quad (2.51)$$

Die Photonen aus den Annihilationen lassen sich heute als Hintergrundstrahlung nachweisen. Das Verhältnis Baryonen zu Photonen ist

$$n_B/n_\gamma \approx 10^{-9} \quad (2.52)$$

Das heißt, auf  $10^9$  Antibaryonen gab es  $10^9 + 1$  Baryonen. Der Mechanismus, mit dem diese Asymmetrie erzeugt wurde, ist nicht bekannt. Es wird vermutet, dass es zur Zeit der GUT-Symmetriebrechung (siehe oben) passiert sein könnte.

- $t = 1 \text{ s}, E = 1 \text{ MeV:}$

Die Reaktionsrate von Neutrinos wird so klein, dass sie sich von der übrigen Materie entkoppeln und sich seitdem unabhängig entwickeln. Sie tragen wie die Photonen zu der kosmischen Hintergrundstrahlung bei, konnten aber wegen der extrem niedrigen Energien und Wirkungsquerschnitte bisher nicht nachgewiesen werden.

Neutrinoreaktionen haben Neutronen und Protonen im thermischen Gleichgewicht gehalten. Das Entkoppeln der Neutrinos ist der Ausgangspunkt für die Nukleosynthese, in der fast alle verbliebenen Neutronen in He-Kerne eingebaut werden (siehe unten, Abschnitt 2.4).

Ab einer Energie  $E \approx 0.5 \text{ MeV}$ , entsprechend der Elektronenmasse, annihilieren Elektronen und Positronen und werden nicht mehr erzeugt:

$$e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma. \quad (2.53)$$

Es verbleiben ebenso viele Elektronen wie Protonen, weil das Universum elektrisch neutral ist, das heißt:

$$n_{e^-}/n_\gamma \approx 10^{-9}. \quad (2.54)$$

Die Photonen bleiben über den Compton-Streuprozess noch weiter in Kontakt mit den Elektronen, solange die Dichte noch groß genug ist.

- $t = 10^2 \text{ s}, E = 0.1 \text{ MeV}:$

Bildung der leichten Kerne  $^1\text{H}$ ,  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^7\text{Li}$ , deren gemessenen relativen Häufigkeiten mit den Vorhersagen des Urknall-Modells über 10 Größenordnungen übereinstimmen. Diese ‘primordiale Nukleosynthese’ wird in Abschnitt 2.4 ausführlicher behandelt.

- $t = 10^{12} \text{ s} (\approx 10^5 \text{ Jahre}), E = 1 \text{ eV}:$

Das Weltall wird transparent für Photonen, die sich von der übrigen Materie entkoppeln und sich von da an nur durch die Expansion des Universums abkühlen. Die 3K-Hintergrundstrahlung ist sehr gut vermessen und eine der wesentlichen Stützen des Urknall-Modells (siehe Abschnitt 2.5).

Kerne und Elektronen kondensieren zu stabilen Atomen. Die Gravitation regiert nun das materiedominierte Universum und verstärkt Dichtefluktuationen, die sich zu Sternen und Galaxien entwickeln.

- $t = 5 \cdot 10^{17} \text{ s} (\approx 2 \cdot 10^{10} \text{ Jahre}), E = 0.3 \text{ meV}:$

Heute.

### 2.2.3 Probleme des Urknall-Modells

Obwohl das Urknall-Modell sehr sichere experimentelle Stützen hat (Hubble-Expansion, primordiale Nukleosynthese, 3K-Strahlung) gibt es für das Modell in seiner Standardform grundsätzliche Probleme und ungelöste Fragen, von denen wir einige hier aufzählen:

- Flachheitsproblem: Ob die Expansion des Universums sich einmal umkehren wird, hängt von der Materiedichte ab. Die beobachtete Dichte ist nahe der kritischen Dichte,  $\Omega \approx 1$ . Selbst wenn das nur auf einen Faktor 100 richtig ist, sind extrem genaue Anfangsbedingungen im Urknall notwendig, um auf diesen

heutigen Wert zu bekommen. Nach Gleichung (2.20) ergibt sich für  $\Omega - 1$  die zeitliche Entwicklung:

$$\Omega - 1 \sim \frac{1}{\dot{R}^2} \sim t^{2/3} \dots t \quad (2.55)$$

Die Potenz von  $t$  ergibt sich je nachdem ob das Universum von Materie oder Strahlung dominiert ist. Zum Beispiel muß  $10^{-36}$  s nach dem Urknall die Dichte auf  $10^{-50}$  genau auf die kritische Dichte abgestimmt sein. Noch 1 s nach dem Urknall muß die Abweichung von der kritischen Dichte kleiner als  $10^{-14}$  sein. Eine solche Feinabstimmung ohne einen physikalischen Grund widerspricht dem Prinzip der ‘Natürlichkeit’.

- Horizontproblem: Das Universum erscheint sehr homogen und isotrop bezüglich der Verteilung von Galaxien und der Hintergrundstrahlung zu sein. Diese Homogenität und Isotropie erstreckt sich über Bereiche, die zu Zeiten, als die Galaxien und die Strahlung sich zu entwickeln begannen, kausal nicht zusammenhängen konnten (Abb. 2.9).

Ein Beobachter heute sieht Ereignisse im Universum, die mit Lichtgeschwindigkeit zu ihm gelangen können. Damit ergibt sich ein maximaler Abstand bis zu dem man in das Universum blicken kann, der ‘Ereignishorizont’:

$$d_H(t) = R(t) \int_0^t \frac{c dt'}{R(t')} \quad (2.56)$$

Beobachter, die die doppelte Entfernung haben, sehen nichts gemeinsames, sie sind kausal getrennt. Der Ereignishorizont ist zeitabhängig und zwar so, dass man heute Bereiche überblickt, die früher kausal getrennt waren wie in Abb. 2.9 dargestellt. Zum Beispiel waren während der GUT-Zeit, etwa  $10^{-35}$  s nach dem Urknall, zwei Beobachter im Abstand von etwa  $10^{-26}$  m kausal getrennt. Dieser Abstand hat sich bis heute zu gerademal etwa 5 m entwickelt. Warum ist dann die Hintergrundstrahlung, die aus viel größeren Gebieten kommt, so isotrop?

- Monopolproblem: Dieses Problem hängt mit dem Horizontproblem zusammen. Die spontane Brechung der GUT-Symmetrie sollte in kausal nicht zusammenhängenden Gebieten unabhängig ablaufen. Spontane Symmetriebrechung bedeutet, dass von verschiedenen möglichen Zuständen niedrigster Energie ein bestimmter Zustand willkürlich eingenommen wird. Wenn dieser Zustand unterschiedlich in verschiedenen Gebieten eingenommen wird, entstehen an den Übergangsstellen im Allgemeinen topologische Defekte (wie zum Beispiel die Bloch-Wände bei spontaner Magnetisierung). Topologische Defekte können in verschiedenen Dimensionen auftreten: Monopole sind punktförmige Defekte, Bloch-Wände sind zweidimensionale Defekte usw. Bei der GUT-Symmetriebrechung sollten Monopole entstanden sein, die aber bisher nicht mit den in einfachen Modellen erwarteten Eigenschaften und Raten beobachtet wurden.
- Baryonasymmetrie: Das beobachtete Verhältnis Baryonen zu Photonen  $n_B/n_\gamma \approx 10^{-9}$  und die Unterdrückung von Antibaryonen um mindestens  $10^{-4}$  ist wahrscheinlich im Rahmen des Standardmodells nicht zu erklären.

- Dunkle Materie: Die Messungen der Materiedichte ergibt je nach Methode sehr unterschiedliche Ergebnisse. Die Messungen legen nahe, dass es weitere, nicht-baryonische Materie gibt. Die Suche danach ist bisher erfolglos geblieben.
- Kosmologische Konstante: In den letzten Jahren erhärten sich experimentelle Hinweise, dass es eine kosmologische Konstante  $\Lambda \neq 0$  gibt. Es ist aber völlig unklar, welche Bedeutung sie hat.

## 2.3 Inflation

Die beiden ersten Probleme können eventuell durch sogenannte ‘Inflationsmodelle’ beseitigt werden. In diesen Modellen durchläuft das Universum in einem frühen Stadium eine ‘inflationäre’, exponentielle Expansion (Abb. 2.10), in der sich kausal zusammenhängende Blasen entwickeln. Wir befinden uns demnach in einer solchen Blase. Wir haben allerdings kein allgemein anerkanntes Modell, wie diese Inflation ablaufen sollte. Als Ursache kommt eine nicht verschwindende kosmologische Konstante in Frage, die eine “Anti-Gravitation”, also ein Aufblähen des Raumes bewirkt. Man kann sich das etwa so vorstellen: In einer sehr frühen Phase nach dem Urknall soll die Energiedichte  $\rho$  durch die potentielle Energie eines Vakuumfeldes gegeben sein, deren Dichte bei der Expansion konstant bleiben soll. Das ist verträglich mit bekannten Eigenschaften des Vakuums (Casimir-Effekt, siehe [10]): die Vakuumenergie wächst mit wachsendem Volumen an, weil mehr Moden der Quantenfluktuationen Platz finden. Damit kann nach einer anfänglichen Expansion entsprechend einer Strahlungsdominanz, die zu einem Abfall der Strahlungsdichte führt, die konstante Vakuumenergiedichte in (2.40) dominant werden. Die Friedmann-Gleichung wird dann:

$$H(t)^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - k \frac{c^2}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \rightarrow H^2 = \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G \rho_v}{3} = konst \quad (2.57)$$

Die Lösung von

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H^2 = konst \quad (2.58)$$

ist ein exponentielles Anwachsen der Expansion (für  $H > 0$ ):

$$R(t) = R_i \cdot e^{Ht} \quad (2.59)$$

Dass die Beschleunigung positiv ist, sieht man auch, wenn man die Zustandsgleichung für das Vakuum,  $p = -\rho_v c^2$  in die erste Friedmanngleichung (2.37) einsetzt.

Die Inflation kommt zur Ruhe, wenn die potentielle Energie des Vakuums in kinetische Energie von erzeugten Teilchen soweit umgewandelt worden ist, dass die anderen Terme in der Friedmann-Gleichung dominieren.

Es gibt bisher keine allgemein anerkannte theoretische Beschreibung der inflationären Phase. Zum Beispiel ergeben die Berechnungen der Vakuumenergie Werte, die mit Beobachtungen in unserem Universum nicht verträglich sind.

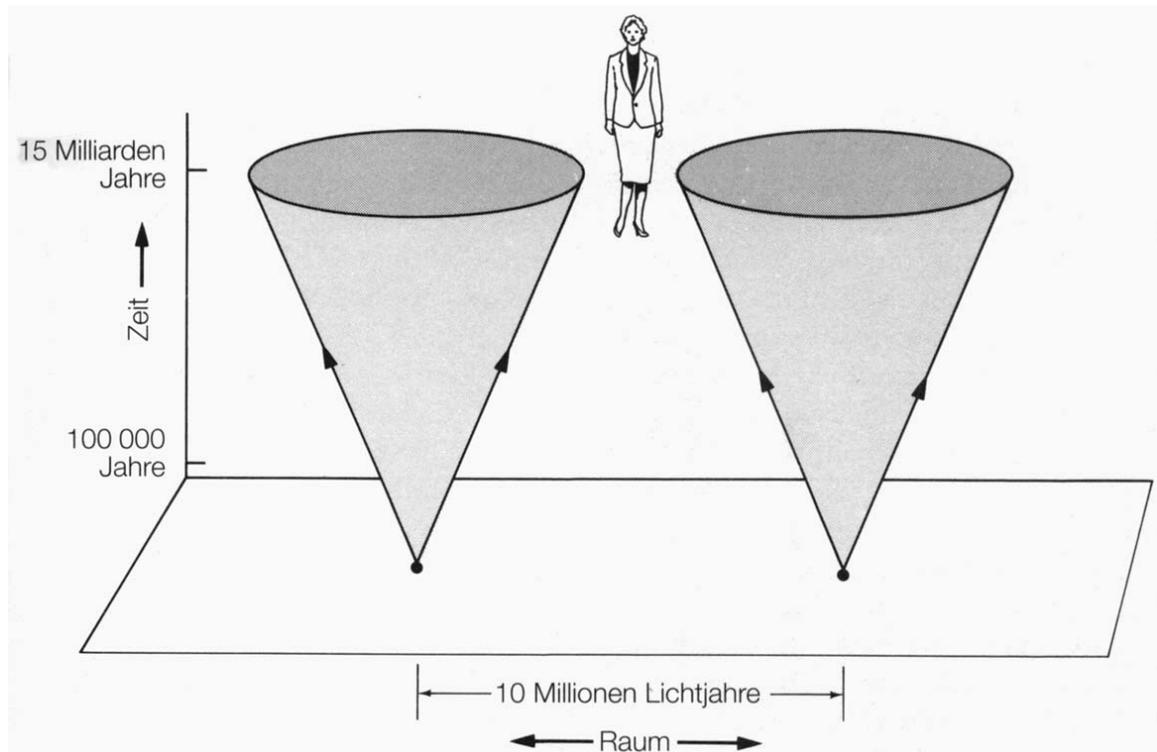


Abbildung 2.9: Beobachter der kosmischen Hintergrundstrahlung empfangen Signale aus Quellen, die  $10^7$  Lichtjahre voneinander entfernt waren, als das Universum etwa  $10^5$  Jahre alt war. Die Temperatur der Strahlung, die aus derart kausal getrennten Gebieten kommt, ist im wesentlichen die gleiche. Es ist, als ob die Quellen dennoch voneinander wüssten.

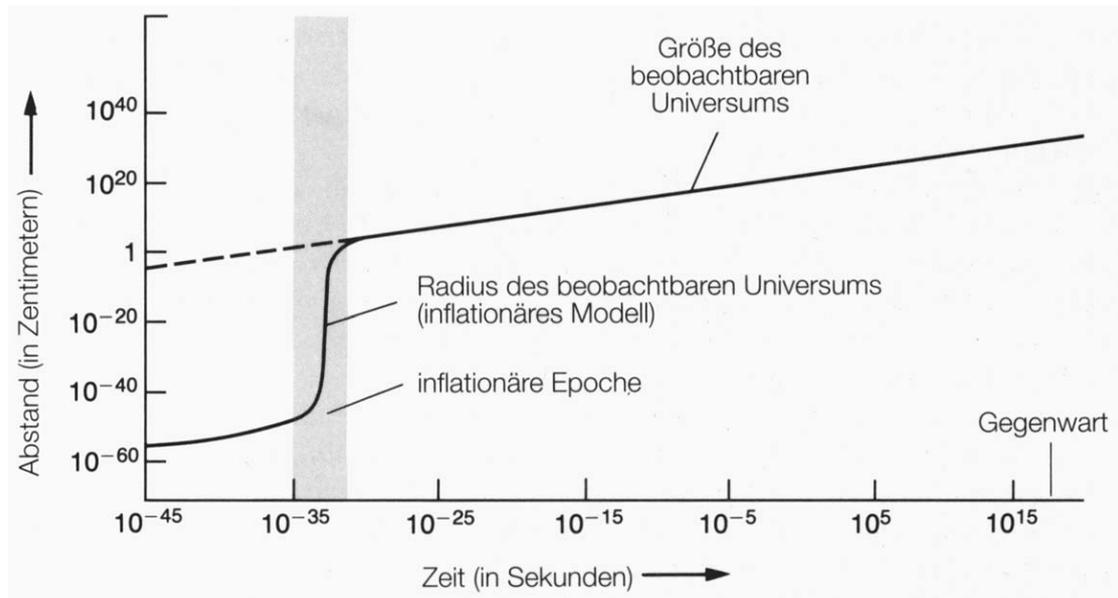


Abbildung 2.10: Entwicklung des Universums mit einer inflationären Phase etwa zur GUT-Zeit. Die Größe dessen, was heute das beobachtbare Universum ist, wächst um mindestens  $10^{50}$  während der kurzen inflationären Phase an.

## 2.4 Nukleosynthese

Ein wesentlicher Erfolg des Urknall-Modells ist die Übereinstimmung der berechneten Nukleosynthese im Urknall mit den gemessenen Häufigkeiten der leichten Elemente  $^1\text{H}$ ,  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^7\text{Li}$ . Die Meßwerte gehen über einen Bereich von etwa 10 Größenordnungen. Die Vorhersagen, in die neben den kosmologischen Parametern bemerkenswerterweise alle vier bekannten Wechselwirkungen wesentlich eingehen, sind (abgelesen aus Abb. 2.11 bei  $\eta \approx \cdot 10^{-10}$ ):

$$^1\text{H} : ^2\text{H} : ^3\text{He} : ^4\text{He} : ^7\text{Li} \approx 1 : 3 \cdot 10^{-5} : 1 \cdot 10^{-5} : 0.25 : 4 \cdot 10^{-10} \quad (2.60)$$

Zur Erklärung dieser Häufigkeiten beginnen wir bei etwa  $t = 0.02\text{ s}$  nach dem Urknall: die thermischen Energien sind etwa  $10\text{ MeV}$ , die Nukleonen haben sich gebildet und es gibt ein Gleichgewichtsverhältnis von Protonen zu Neutronen, das durch die schwache Wechselwirkung über folgende Reaktionen aufrechterhalten wird:



Bei etwa  $t = 1\text{ s}$ , entsprechend etwa  $1\text{ MeV}$ , beginnen die Neutrinos wegen der geringen Reaktionsrate zu entkoppeln. Für die Reaktionsraten in (2.61) ergibt sich:

$$\Gamma \sim G_F^2 T^5 \quad (2.62)$$

Der quantitative Vergleich mit der Expansionsrate  $H \sim \frac{1}{t} \sim T^2$  ergibt, dass die Raten bei  $0.8\text{ MeV}$  gleich sind:

$$\frac{\Gamma}{H} \approx \left( \frac{kT}{0.8\text{ MeV}} \right)^3 \quad (2.63)$$

Das heißt, bei der Energie von  $0.8\text{ MeV}$ , entsprechend einer Temperatur  $T = 10^{10}\text{ K}$ , beginnt das  $n/p$ -Verhältnis vom Gleichgewicht abzuweichen ('ausfrieren'). Das  $n/p$ -Verhältnis ist bei der Ausfrieretemperatur  $T_f$  durch die Boltzmann-Verteilung gegeben (mit dem  $n-p$ -Massenunterschied  $\Delta m = 1.293\text{ MeV}$ ):

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(-\frac{\Delta m}{kT_f}\right) \approx 0.20 \quad (2.64)$$

Dieses Verhältnis ändert sich nach dem Ausfrieren nur noch durch den Zerfall der Neutronen (Lebensdauer  $\tau_n = (885.7 \pm 0.8)\text{ s}$ ) oder deren Einbau in Kerne. Am Ende einer Reaktionskette, die wir im Folgenden beschreiben, sind nahezu alle verbleibenden Neutronen in  $^4\text{He}$ -Kernen eingebaut (der Anteil der anderen Kerne kann dabei vernachlässigt werden) und bestimmen damit die primordiale  $^4\text{He}$ -Häufigkeit.

Wir betrachten jetzt das weitere Schicksal der Neutronen nach dem Ausfrieren: Die Neutronen können mit Protonen Deuterium bilden,



das allerdings bei Temperaturen oberhalb  $T = 10^9\text{ K}$  schnell wieder im Umkehrprozess dissoziiert, weil die Photonendichte etwa  $10^9$ -mal höher als die Nukleonendichte

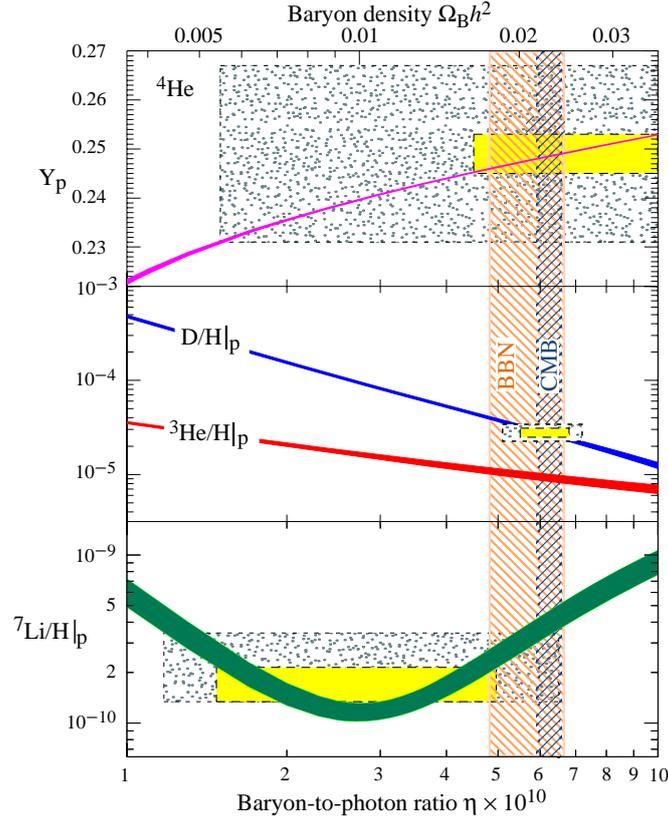
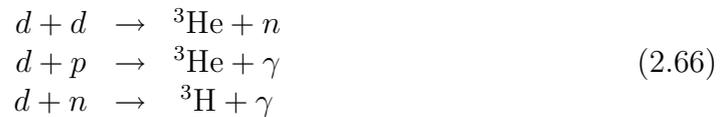


Abbildung 2.11: Die Vorhersage (Kurven) für die Häufigkeit der kurz nach dem Urknall erzeugten leichten Elemente als Funktion des heutigen Verhältnisses der Baryonen- zur Photonendichte,  $\eta = n_B/n_\gamma$ , verglichen mit den heutigen Messungen (die Boxen geben  $2\sigma$ -Bereiche an, die größeren enthalten auch den systematischen Fehler). Der senkrechte Streifen zeigt das aus der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMBR) bestimmte Baryon-Photon-Verhältnis.

ist (siehe weiter unten). Unterhalb dieser Temperatur (entsprechend etwa 0.1 MeV) kann das Deuterium  ${}^3\text{He}$  und  ${}^3\text{H}$  (Tritium) bilden:



Die  ${}^4\text{He}$ -Synthese beginnt bei einer Temperatur von  $T = 0.9 \cdot 10^9$  K, etwa 225 s nach dem Urknall oder 100 s nach dem Ausfrieren der Nukleonen, zum Beispiel über folgende Reaktionen:



Durch den Neutronzerfall ist zu diesem Zeitpunkt das Neutron/Proton-Verhältnis auf  $n_n/n_p = 0.14$  abgesunken. Die Anzahl der gebildeten Helium-Kerne ist (mit der sehr guten Näherung, dass die Bildung anderer Elemente vernachlässigbar ist):

$$n_{\text{He}} = n_n/2 \Rightarrow \frac{n_{\text{He}}}{n_{\text{H}}} = \frac{0.14}{2(1 - 0.14)} = 0.082
 \tag{2.68}$$