

---

# Theoretische Grundlagen

---

In diesem Kapitel sollen die theoretischen Grundlagen der experimentellen Teilchenphysik, soweit für diese Vorlesung relevant, kurz wiederholt werden. Einen tieferen Einblick in die theoretische Teilchenphysik gibt die Vorlesung „Theoretische Einführung in das Standardmodell“ (typischerweise im Wintersemester angeboten). Die formalen Grundlagen werden in der Vorlesung „Einführung in die Quantenfeldtheorie“ (typischerweise im Sommersemester) gelegt.

## 2.1 Relativistische Quantenfeldtheorie

### 2.1.1 Die Dirac-Gleichung

#### Formulierung

P. A. M. Dirac hat in den 1920er Jahren versucht, ein Äquivalent zur Schrödinger-Gleichung

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (2.1)$$

für relativistische Spin-1/2-Teilchen wie Elektronen aufzustellen (Wellenfunktion  $\psi$ , Hamiltonoperator  $H$ ). Die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + m^2) \phi = 0 \quad (2.2)$$

ist zwar relativistisch, beschreibt aber nur skalare (Spin-0-)Teilchen und ist nicht linear in den Ableitungen, sondern quadratisch. Hier ist  $\square = \partial^\mu \partial_\mu = \partial^2 / \partial t^2 - \vec{\nabla}^2$  der D'Alembert-Operator und  $m$  die Masse des Teilchens. Die Dirac-Gleichung [Dir28]

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} + i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m \right) \psi = 0 \quad (2.3)$$

beschreibt relativistische Spin-1/2-Teilchen, wenn  $\psi$  eine Wellenfunktion mit vier Komponenten („Spinor“) ist und  $\alpha_i (i = 1 \dots 3)$  und  $\beta$   $4 \times 4$ -Matrizen sind. Die Matrizen antikommutieren, d. h.

$$\beta^2 = \mathbb{1}_4, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = \mathbb{1}_4 \delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad \text{für alle } i, j = 1 \dots 3, \quad (2.4)$$

wobei  $\mathbb{1}_4$  die  $4 \times 4$ -Einheitsmatrix und  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol ist. Eine mögliche Wahl für  $\vec{\alpha}$  und  $\beta$  („Dirac-Darstellung“) ist

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Dabei ist  $\mathbb{1}_2$  die  $2 \times 2$ -Einheitsmatrix und  $\sigma_i$  die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

In der Teilchenphysik ist folgende Schreibweise der Dirac-Gleichung gängig:

$$(i\partial - m)\psi = 0. \quad (2.7)$$

Diese ergibt sich durch Multiplikation von Gl. (2.3) von links mit  $\beta$  und folgenden Definitionen:

$$\gamma^0 := \beta, \quad \gamma^i := \beta\alpha_i, \quad \partial := \gamma^\mu \partial_\mu, \quad \partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right). \quad (2.8)$$

Aus den obigen Definitionen ergibt sich, dass die  $\gamma$ -Matrizen vier antikommutierende  $4 \times 4$ -Matrizen sind:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}_4. \quad (2.9)$$

In der Dirac-Darstellung lauten die  $\gamma$ -Matrizen dann

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots 3. \quad (2.10)$$

Die adjungierte Dirac-Gleichung ergibt sich mit  $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$  zu

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) = 0, \quad (2.11)$$

wobei  $\psi^\dagger := \psi^{T*}$  der hermitesch konjugierte Spinor von  $\psi$  ist und  $\partial_\mu$  auf  $\bar{\psi}$  nach links wirkt. Multipliziert man (2.11) mit  $\psi$  und (2.7) mit  $\bar{\psi}$  und addiert die beiden Gleichungen, ergibt sich die Erhaltung des Dirac-Stroms  $j^\mu$ :

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \text{mit } j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (2.12)$$

### Lösungen der Dirac-Gleichung und Interpretation

Ursprünglich wurde im Rahmen der statistischen Interpretation der Quantenmechanik der Dirac-Spinor  $\psi$  als Einteilchen-Wellenfunktion mit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $|\psi|^2$  gesehen. Die Dirac-Gleichung kann in diesem Rahmen mittels ebener Wellen gelöst werden. Dabei ergeben sich zwei Lösungen mit positiver Energie,

$$\psi_{1,2} = u_{1,2}(p) e^{-ipx}, \quad (2.13)$$

interpretiert als Teilchen mit Ladung  $q$ , Impuls  $\vec{p}$  und Spin  $\vec{s}$  parallel ( $u_1$ : „spin up“) und antiparallel zum Impuls ( $u_2$ : „spin down“). Es gibt zusätzlich zwei Lösungen mit negativer Energie,

$$\psi_{3,4} = v_{2,1}(p) e^{ipx}, \quad (2.14)$$

also Teilchen mit Ladung  $q$ , die sich mit  $-\vec{p}$  bewegen und Spin  $-\vec{s}$  besitzen. Diese wurden zunächst als „Dirac-See“ interpretiert. Der Dirac-See ist die Menge aller Zustände mit negativer Energie. Nach dem Pauli-Prinzip sind fast alle dieser Zustände besetzt. Ein „Loch“ im See wird dann als Antiteilchen mit positiver Energie (Ladung  $-q$ , Impuls  $\vec{p}$ , Spin  $\vec{s}$ ) interpretiert. Damit sagt die Dirac-Gleichung die Existenz von Antielektronen („Positronen“) voraus, die schon 1932 in kosmischer Strahlung entdeckt wurden [And33].

Mit den Lösungen der Dirac-Gleichung (2.13) und (2.14) kann man die Gleichung für Teilchen im Impulsraum darstellen als:

$$(\not{p} - m)u(p) = 0 \quad (2.15)$$

Ein Antiteilchen hat dann den Viererimpuls  $-p = (-E, -\vec{p})$  und damit

$$(-\not{p} - m)u(-p) = 0 \rightarrow (\not{p} + m)v(p) = 0. \quad (2.16)$$

Hier ist  $\not{p} := \gamma^\mu p_\mu$  die Impulsraumdarstellung des Ortsraumoperators  $i\partial$ .

Das Konzept des Dirac-Sees ist problematisch, denn der See soll unendlich viel elektrische Ladung beinhalten und gleichzeitig unbeobachtbar sein. Aus diesem Grund musste die Einteilchen-Interpretation aufgegeben werden. Eine konsistente theoretische Beschreibung findet sich im Prozess der Feldquantisierung (manchmal irreführenderweise auch 2. Quantisierung genannt) im Rahmen der Quantenfeldtheorie. Damit können Teilchen und Antiteilchen als Anregungszustände des Dirac-Feldes mit positiver Energie interpretiert werden. Von Stückelberg und Feynman stammt die (äquivalente) Interpretation, ein Antiteilchen als Teilchen mit negativer Energie zu sehen, das rückwärts in der Zeit läuft.

### 2.1.2 Chirale Fermionen

Man kann zeigen, dass die Projektion des Spinoperators  $\vec{\Sigma}$  auf den Impuls-Einheitsvektor  $\hat{p} := \vec{p}/|\vec{p}|$ ,

$$\lambda := \vec{\Sigma} \cdot \hat{p}, \quad \text{mit} \quad \Sigma_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

eine „gute“ Quantenzahl ist, d. h. mit dem Hamiltonoperator vertauscht und so gleichzeitig mit Energie und Impuls messbar ist. Man bezeichnet  $\lambda$  als „Helizität“. Für massive Teilchen ist die Helizität nicht lorentzinvariant, denn man kann ein Bezugssystem finden, in dem sich die Bewegungsrichtung umkehrt, der Spin aber nicht.

Von der Helizität unterscheidet man die Chiralität (Händigkeit), die eine zentrale Rolle in der elektroschwachen Wechselwirkung spielt. Die Chiralität ist formal definiert als Eigenwert zum Chiralitätsoperator

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = \mathbb{1}_4. \quad (2.18)$$

Wenn  $\psi$  eine Lösung der Dirac-Gleichung für masselose Teilchen ist, ist auch  $\gamma^5\psi$  eine Lösung, da  $\gamma^5$  mit den Dirac-Matrizen antikommutiert. Damit kann man Lösungen der Dirac-Gleichung für masselose Teilchen anhand ihrer Eigenwerte zu  $\gamma_5$  klassifizieren:

$$\gamma^5 u_\pm = \pm u, \quad \gamma^5 v_\pm = \pm v. \quad (2.19)$$

Dabei beschreibt  $u_-$  ( $u_+$ ) ein „linkshändiges“ („rechtshändiges“) Teilchen und  $v_-$  ( $v_+$ ) ein „rechtshändiges“ („linkshändiges“) Antiteilchen. Mit den Projektionsoperatoren

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad \text{und} \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \quad (2.20)$$

kann man dann aus einem beliebigen Spinor die links- bzw. rechtshändigen Komponenten herausprojizieren. Für masselose Teilchen sind Chiralität und Helizität dasselbe.

### 2.1.3 Lagrangedichte

In der QFT wird der Lagrangeformalismus verwendet, um die Bewegungsgleichung eines Systems abzuleiten. Er beruht auf dem Prinzip der kleinsten Wirkung, auch als Hamilton-Prinzip bezeichnet. Ein System verhält sich so, dass die Wirkung

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.21)$$

extremal wird. Im Lagrangeformalismus wird das System also vollständig durch die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  beschrieben. Dabei ist  $\mathcal{L}$  eine Funktion des Quantenfeldes  $\phi(x)$  an einem Raumzeitpunkt  $x$  und seiner ersten Ableitung  $\partial_\mu \phi(x)$ . Dies ist eine wichtige Eigenschaft u. a. auch des Standardmodells: es handelt sich um eine lokale Feldtheorie, d. h. es gibt keine Fernwechselwirkungen. Mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (2.22)$$

kann dann aus  $\mathcal{L}$  die Bewegungsgleichung abgeleitet werden, z. B.

- Klein-Gordon-Gleichung:  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2)$ ,
- Dirac-Gleichung:  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi$ .

Diese Bewegungsgleichungen sind gültig für freie Teilchen mit der Masse  $m$ . Im Fall der Klein-Gordon-Gleichung werden Spin-0-Teilchen beschrieben, im Fall der Dirac-Gleichung Spin-1/2-Teilchen.

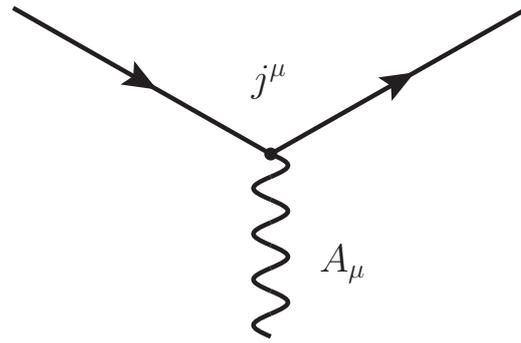
### 2.1.4 Quantenelektrodynamik

Als erste QFT mit Relevanz für die Teilchenphysik wurde in den 1930er Jahren die Quantenelektrodynamik (QED) entwickelt. Der entscheidende Durchbruch in der Berechenbarkeit von QED-Prozessen gelang in den 1940er Jahren [Fey48, Fey49, Sch48a, Sch48b, Sch49, Tom46]. Die QED beschreibt Wechselwirkungen zwischen Photonen und geladenen Teilchen. Wie in der klassischen Elektrodynamik wird die Wechselwirkung zunächst über die „minimale Substitution“ eingeführt. Dabei finden die Ersetzung

$$p_\mu \rightarrow p_\mu + qA_\mu \quad (2.23)$$

mit der elektrischen Ladung  $q$  und dem Viererpotenzial  $A_\mu := (\phi, \vec{A})$ , das mit dem Photonfeld identifiziert wird. Mit dem quantenmechanischen Impulsoperator  $p_\mu = i\partial_\mu$  ergibt sich dann für die Dirac-Gleichung mit elektromagnetischer Wechselwirkung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = (i\mathcal{D} - m)\psi = 0, \quad (2.24)$$



**Abbildung 2.1:** Kopplung des Dirac-Stroms  $j^\mu$  an ein Photonfeld  $A_\mu$ .

wobei die „kovariante Ableitung“  $D_\mu := \partial_\mu + iqA_\mu$  definiert ist. Dieser Ad-Hoc-Ansatz wird später durch das Eichprinzip motiviert. Die Lagrangedichte für Elektronen, die mit Photonen wechselwirken, ist demnach:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (2.25)$$

In obiger Gleichung erkennt man den Dirac-Strom  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . Man kann also aus  $\mathcal{L}$  die Kopplung des Dirac-Stroms an das Photonfeld ablesen, siehe Abb. 2.1:  $-qj^\mu A_\mu$ .

Das Ampère'sche Gesetz  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = qj^\nu$  mit dem elektromagnetischen Feldstärke-tensor  $F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  verlangt noch einen kinetischen Term für das Photonfeld in der Lagrangedichte. Damit erhält man die Lagrangedichte der QED als

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

Generell gilt, dass Lagrangedichten Lorentz-Skalare sind (also keine Indizes  $\mu, \nu, \dots$  enthalten) und somit lorentzinvariant ist. Die Lagrangedichte ist eine Energiedichte, hat also in den hier verwendeten „natürlichen Einheiten“ die Einheit  $[E][L]^{-3} = [E]^4$ . Damit hat das Klein-Gordon-Feld die Einheit  $[E]$ , das Dirac-Feld die Einheit  $[E]^{3/2}$  und das Photonfeld die Einheit  $[E]$ .

## 2.2 Das Eichprinzip

Die Ad-Hoc-Einführung einer Wechselwirkung ist unbefriedigend. In der QFT werden Wechselwirkungen über das Eichprinzip eingeführt. Die Grundidee ist, dass sich die Wechselwirkungen aus der Forderung ergeben, dass die Lagrangedichte in einer QFT invariant ist gegenüber einer lokalen Symmetrieoperation. Sobald diese „Eichsymmetrie“ bekannt ist, kann die vollständige Dynamik der QFT abgeleitet werden.<sup>1</sup> Abhängig von der Art der Symmetrie enthält die QFT eines oder mehrere „Eichbosonen“, die die Wechselwirkung vermitteln.

### 2.2.1 Diskrete Symmetrien

Quantenfelder lassen sich anhand ihres Verhalten bei diskreten Symmetrieoperationen klassifizieren. Die Symmetrien Ladungskonjugation  $C$ , Parität  $P$  und Zeitumkehr  $T$  spie-

<sup>1</sup>Von W. Heisenberg stammt der Satz „Am Anfang war die Symmetrie.“ [Hei69]

**Tabelle 2.1:** Bilineare Kovarianten. Der Tensor  $\sigma^{\mu\nu}$  ist definiert als Kommutator  $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ .

Name	Bilinearform	$C$	$P$	$T$
Skalar	$\bar{\psi}\psi$	+	+	+
Pseudoskalar	$\bar{\psi}\gamma_5\psi$	+	-	-
Vektor	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	-	+	+
Axialvektor	$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$	+	-	+
Tensor	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	-	+	-

len in der QFT eine entscheidende Rolle. Nach dem Pauli-Lüders-Theorem [Pau55, Lüd57] ist jede lokale lorentzinvariante QFT invariant unter der gemeinsamen Symmetrie  $CPT$ .

### Ladungskonjugation $C$

Die Ladungskonjugationsoperation  $C$  überführt ein Teilchen in sein Antiteilchen. Für Dirac-Felder und die Dirac-Darstellung der  $\gamma$ -Matrizen lautet die Operation

$$\psi(x) \rightarrow \psi^C(x) = i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^T(x). \quad (2.27)$$

### Parität $P$

Die Paritätsoperation entspricht einer Punktspiegelung am Ursprung, überführt also  $x = (t, \vec{x})$  nach  $x^P := (t, -\vec{x})$ . Für Dirac-Felder bedeutet dies

$$\psi(x) \rightarrow \psi^P(x^P) = \gamma^0\psi(x^P). \quad (2.28)$$

### Zeitumkehr $T$

Die Zeitumkehroperation  $x = (t, \vec{x}) \rightarrow x^T := (-t, \vec{x})$  bedeutet für Dirac-Felder

$$\psi \rightarrow \psi^T(x^T) = i\gamma^1\gamma^3\psi(x^T). \quad (2.29)$$

### Dirac-Bilinearformen

Zur Konstruktion einer Lagrangedichte können verschiedene Bilinearformen von Dirac-Feldern („bilineare Kovarianten“) benutzt werden. In Tabelle 2.1 ist ihr Verhalten unter den diskreten Symmetrieeoperationen  $C$ ,  $P$  und  $T$  gezeigt.

## 2.2.2 Kontinuierliche Symmetrien und Gruppentheorie

Neben den diskreten Symmetrien besitzen QFTen kontinuierliche Symmetrien. Diese sind dadurch charakterisiert, dass sie sich durch infinitesimale Transformationen zusammensetzen lassen. Ein Beispiel für eine kontinuierliche Symmetrie ist die quantenmechanische Phase. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Zustands  $|\psi\rangle^2$  ist invariant unter Phasentransformationen der Form

$$U(\psi) = e^{i\alpha}\psi. \quad (2.30)$$

Diese Transformation lässt sich aus infinitesimalen Transformationen der Form  $\delta U(\psi) = (1 + i\alpha)\psi$  zusammensetzen. Alle Transformationen  $U$  bilden eine Gruppe unter Multiplikation, die Gruppe der unitären Transformationen  $U(1)$ . Zwei beliebige Transformationen  $U_1$  und  $U_2$  kommutieren,  $[U_1, U_2] = 0$ . Eine Gruppe mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als abelsche Gruppe. Die Gruppe  $U(1)$  gehört zur Klasse der Lie-Gruppen. Details dazu finden sich im Standardwerk von Georgi [Geo99].

### 2.2.3 Das Eichprinzip in der QED

Das Eichprinzip fordert, dass die Lagrangedichte der QED invariant ist unter lokalen Transformationen  $U$  der quantenmechanischen Phase  $\alpha(x)$ , also

$$\psi \rightarrow U\psi(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x). \quad (2.31)$$

Lokal bedeutet hier, dass die Phase eine Funktion des Raumzeitpunktes  $x$  ist. In der Lagrangedichte ergeben sich durch die Transformation der Ableitungen des Feldes

$$\partial_\mu\psi(x) \rightarrow \partial_\mu U\psi(x) = e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi(x) + ie^{i\alpha(x)}\psi(x)\partial_\mu\alpha(x). \quad (2.32)$$

Der zweite Term kann durch eine Modifikation des Ableitungsterms kompensiert werden:

$$D_\mu := \partial_\mu + iqA_\mu. \quad (2.33)$$

Dabei ist  $D_\mu$  die in Kapitel 2.1.4 erwähnte kovariante Ableitung. Das Feld  $A^\mu$  muss hierbei wie folgt transformieren:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x). \quad (2.34)$$

Der Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$  ist ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe. Man kann ihn (immer) aus dem Kommutator der kovarianten Ableitung konstruieren:

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = iqF_{\mu\nu}\psi \quad \Rightarrow \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.35)$$

Die Lagrangedichte der QED (2.26) enthält einen Term für die Masse des Elektrons ( $-m\bar{\psi}\psi$ ). Ein Massenterm für das Photon in der Form  $1/2 m^2 A_\mu A^\mu$  ist allerdings nicht eichinvariant und somit nicht erlaubt. Zusammenfassend wurde durch das Eichprinzip, also die Forderung nach lokaler Eichinvarianz, ein neues masseloses Feld  $A_\mu$  eingeführt, das mit dem Viererpotenzial der Elektrodynamik identifiziert werden kann.

### 2.2.4 Das Eichprinzip in Yang-Mills-Theorien und QCD

Yang und Mills haben das Eichprinzip auch auf nichtabelsche Eichgruppen erweitert [Yan54]. Als Beispiel soll hier die  $SU(3)$ -Gruppe diskutiert werden, die für die QCD relevant ist. Die  $SU(3)$  ist die Gruppe der speziellen unitären Transformationen in drei Dimensionen. Die  $SU(3)$ -Gruppe besteht aus kontinuierlichen Transformationen der Form

$$\psi(x) \rightarrow U\psi(x) = e^{iT^a\alpha^a(x)}\psi(x) \quad (2.36)$$

unter Verwendung der Summenkonvention für gleiche Indizes  $a = 1 \dots 8$ . Man bezeichnet  $T^a$  als die „Erzeugenden“ (Generatoren) der  $SU(3)$ -Gruppe (im Fall der  $U(1)$  war die Erzeugende die Zahl 1) mit dem Kommutator

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (2.37)$$

wobei man die reellen Zahlen  $f^{abc}$  als die „Strukturkonstanten“ der Gruppe bezeichnet. Bis auf

$$f^{123} = 1, \quad f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{516} = f^{637} = \frac{1}{2}, \quad f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.38)$$

sind alle Strukturkonstanten 0. Die Erzeugenden  $T^a$  kann man z. B. durch die Gell-Mann-Matrizen  $\lambda^a$  darstellen mit  $T^a = 1/2\lambda^a$ :

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Analog zur QED ergibt sich aus der Forderung nach lokaler Eichinvarianz unter  $SU(3)$ -Transformationen eine kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^a A_\mu^a, \quad (2.40)$$

wobei  $g$  die Kopplungskonstante der  $SU(3)$  ist, analog zur elektrischen Ladung  $q$  in der QED. In der  $SU(3)$  ergeben sich acht masselose Eichfelder  $A_\mu^a$ , die in der QCD mit den Gluonen identifiziert werden. Bis hierher war die Herleitung der Lagrangedichte aus dem Eichprinzip völlig analog zum Fall der  $U(1)$ . Der entscheidende Unterschied zur  $U(1)$ -Symmetrie ist, dass die Erzeugenden im Fall der  $SU(3)$  nicht kommutieren. Aus diesem Grund bezeichnet man die Gruppe als nichtabelsch. Mit einer Entwicklung der Eichtransformation „um Null“ kann man zeigen, dass die Eichfelder wie

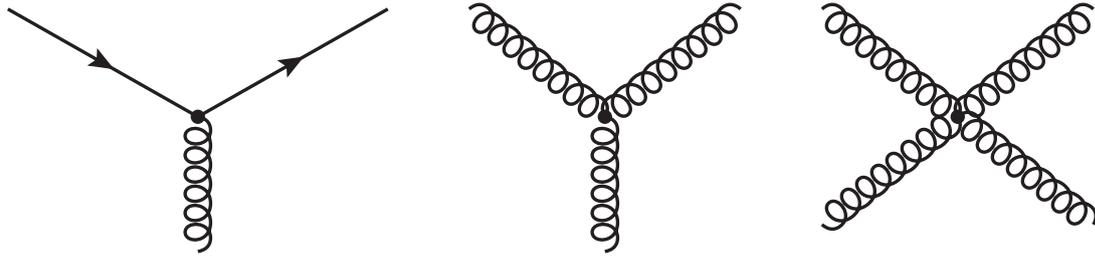
$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a(x) - f^{abc} \alpha^b(x) A_\mu^c \quad (2.41)$$

transformieren müssen, um Eichinvarianz der Lagrangedichte zu garantieren. Auch der Feldstärketensor der  $SU(3)$ ,  $F_{\mu\nu}^a$ , erhält einen neuen Term, wie man aus dem Kommutator  $[D_\mu, D_\nu]$  herleiten kann:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.42)$$

Die Lagrangedichte der Yang-Mills-Theorie ergibt sich dann zu

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu T^a \psi A_\mu^a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}. \quad (2.43)$$



**Abbildung 2.2:** Kopplungen in der QCD: Quarkkopplung an Gluonen und Selbstwechselwirkung der Gluonen.

Nichtabelsche Feldtheorien haben eine deutlich kompliziertere Dynamik als abelsche. Die Lagrangedichte enthält Terme proportional zu  $A^3$  und  $A^4$ , die sich als Selbstwechselwirkungen der Eichfelder interpretieren lassen, siehe Abb. 2.2. Der physikalische Grund für die Selbstwechselwirkung in der QCD liegt in der Tatsache, dass die Gluonen die Ladung der QCD (Farbladung) tragen, während Photonen keine QED-Ladung tragen, d. h. elektrisch neutral sind.

## 2.3 Elektroschwache Theorie

### 2.3.1 Eichgruppe und Lagrangedichte

Als Eichgruppe der elektroschwachen Theorie wurde die einfachste mögliche Gruppe gewählt, die elektromagnetische und schwache Wechselwirkungen beschreibt,  $SU(2) \times U(1)$ , das direkte Produkt der nichtabelschen Gruppe  $SU(2)$  und der abelschen Gruppe  $U(1)$ . Die  $SU(2)$ -Gruppe bezieht sich dabei auf den schwachen Isospin. Der  $V-A$ -Struktur der schwachen Wechselwirkung wird dadurch Rechnung getragen, dass die linkshändigen Fermionen Isospin-Dubletts und die rechtshändigen Fermionen Isospin-Singulets sind:

$$L = \left( \begin{array}{c} \nu_e \\ e^- \end{array} \right)_L, \dots, \left( \begin{array}{c} u \\ d \end{array} \right)_L, \dots, \quad \text{mit } I = \frac{1}{2}, I_3 = \pm \frac{1}{2}, \quad (2.44)$$

$$R = e_R, \dots, u_R, d_R, \dots, \quad \text{mit } I = I_3 = 0. \quad (2.45)$$

Daher bezeichnet man diesen Teil der Eichgruppe auch als  $SU(2)_L$ . Die Gruppe besitzt drei Erzeugende, die Pauli-Matrizen  $\tau^i := \sigma_i$ , siehe (2.6). Daher erhält man drei (masselose) Eichfelder  $W_\mu^1, W_\mu^2$  und  $W_\mu^3$ . Wenn man aus den Erzeugenden  $\tau^{1,2}$  die Auf- und Absteigeoperatoren  $\tau^\pm = (\tau^1 \pm i\tau^2)/2$  bildet, so ergeben sich die zugehörigen Komponenten von  $W_\mu$  als  $W^\pm = (W^1 \mp iW^2)/\sqrt{2}$ . Ein drittes neutrales Eichfeld  $W^3$  bleibt übrig.

Es liegt zunächst nahe, die  $U(1)$ -Gruppe mit der Eichgruppe der QED zu identifizieren. Wenn man aber verlangt, dass die Isospin-Dubletts  $U(1)$ -Singulets sind, ergäbe sich, dass beide Partner eines Isospin-Dubletts dieselbe elektrische Ladung haben müssten, was offensichtlich nicht erfüllt ist. Erst nach Anwendung des Higgs-Mechanismus wird die  $U(1)$ -Gruppe der QED sichtbar werden. In Analogie zur Flavor-Hyperladung wird daher die schwache Hyperladung  $Y$  gewählt, also laut Gell-Mann-Nishijima-Formel (1.1) eine Linearkombination aus Ladung und Isospin:  $I_3 = aQ + bY$ .

Mit der Forderung  $Y(e_L^-) = Y(\nu_{e,L}) = -1$  und der Wahl  $a = 1$  (Festlegung der Skala der Ladung) ergibt sich  $b = 1/2$ , also

$$Y = 2(Q - I_3). \quad (2.46)$$

Die  $U(1)_Y$  besitzt mit  $Y$  eine Erzeugende und folglich auch ein masseloses Eichfeld  $B_\mu$ . Damit lautet die vollständige Eichgruppe  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

Die Lagrangedichte der elektroschwachen Theorie soll zunächst für die Quarks und Leptonen der ersten Familie formuliert werden, also für  $L = (e, \nu_e)_L$ ,  $(u, d)_L$  und  $R = e_R, u_R, d_R$ :

$$\mathcal{L}_{\text{ew}} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} + i\bar{L}\not{D}L + i\bar{R}\not{D}R. \quad (2.47)$$

mit folgenden Definitionen:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (2.48)$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\varepsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c, \quad (2.49)$$

$$D_\mu L = \left( \partial_\mu + ig\frac{\tau^a}{2}W_\mu^a + ig'\frac{Y}{2}B_\mu \right) L, \quad (2.50)$$

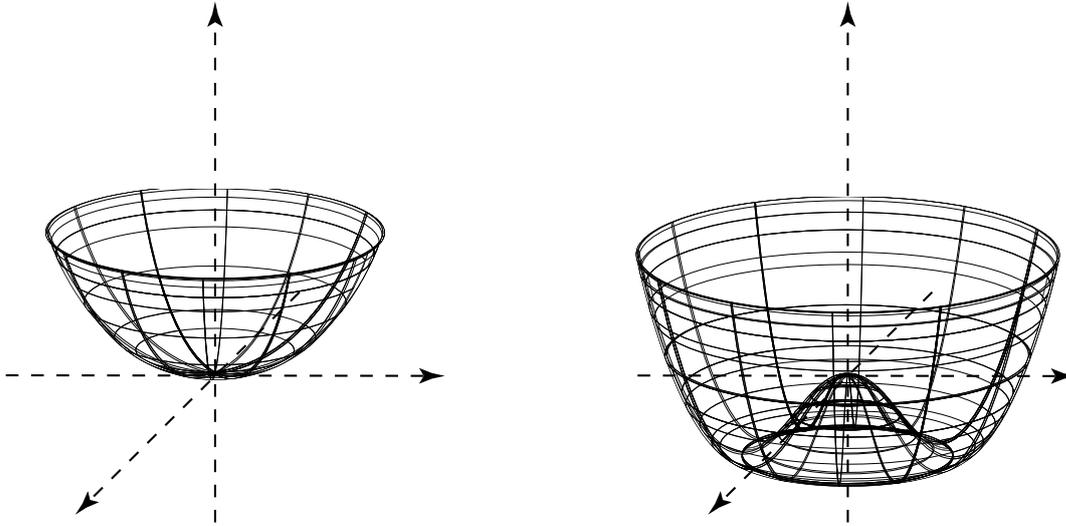
$$D_\mu R = \left( \partial_\mu + ig'\frac{Y}{2}B_\mu \right) R. \quad (2.51)$$

Durch das direkte Produkt der Eichgruppen  $SU(2)_L$  und  $U(1)_Y$  finden sich zwei Kopplungskonstanten  $g$  und  $g'$ , so dass die schwache und die elektromagnetische Kraft nicht im eigentlichen Sinne vereinheitlicht werden.

### 2.3.2 Higgs-Mechanismus

Die Eichfelder der elektroschwachen Theorie sind bislang masselos. Wie in der QED wären somit Terme  $\sim W_\mu^a W^{a,\mu}$  oder  $\sim B_\mu B^\mu$  nicht eichinvariant. Die Massen der Eichfelder (und auch der Fermionen) werden in der elektroschwachen Theorie durch einen zusätzlichen Mechanismus, den Higgs-Mechanismus, realisiert. Dazu wird der Lagrangedichte ein zusätzliches skalares Feld hinzugefügt. Dadurch wird die  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie „spontan gebrochen“, d. h. der Grundzustand der elektroschwachen Theorie (das „Vakuum“) besitzt die Symmetrie der Lagrangedichte nicht mehr. Ein Beispiel dafür in zwei Dimensionen ist das  $\phi^4$ -Potenzial  $V = \mu^2 \phi \phi^* + \lambda/2(\phi \phi^*)^2$ , wie in in Abb. 2.3 illustriert. Dieses „Mexican Hat“-Potenzial ist rotationssymmetrisch, d. h. invariant unter globalen Transformationen der Form  $\phi' = e^{i\alpha} \phi$ . Für  $\mu^2 < 0$  gibt es nicht mehr ein einziges Minimum am Ursprung, sondern unendlich viele Minima auf einem Kreis mit dem Radius  $\sqrt{-\mu^2/\lambda}$ .

Das Goldstone-Theorem besagt, dass zu jeder Erzeugenden einer gebrochenen Symmetrie ein masseloses Boson gehört, das als „Nambu-Goldstone-Boson“ bezeichnet wird. In Abb. 2.3 entspricht das der Bewegungsrichtung entlang des Minimums. Wenn man spontane Symmetriebrechung (SSB) auf eine lokal eichinvariante Theorie anwendet, so ergibt sich eine wichtige Ausnahme vom Goldstone-Theorem, der Higgs-Mechanismus: unter Ausnutzung der lokalen Eichfreiheit kann man Nambu-Goldstone-Bosonen „wegeichen“, so dass nur die massiven Eichbosonen übrig bleiben. Man sagt auch, die Eichbosonen „fressen die Nambu-Goldstone-Bosonen auf, um selbst massiv zu werden“.



**Abbildung 2.3:** Illustration des  $\phi^4$ -Potenzials ohne spontane Symmetriebrechung (SSB) für  $\mu^2 \geq 0$  (links) und mit SSB für  $\mu^2 < 0$  (rechts).

### Das Higgs-Feld im Standardmodell

Im SM führt man die einfachste Version eines skalaren Feldes ein, das Massen für drei massiven Eichbosonen der elektroschwachen Theorie erzeugen kann, gleichzeitig das Photon masselos lässt sowie der  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie der Lagrangedichte genügt. Dies ist ein Isospin-Dublett zweier komplexer skalarer Felder

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad I = \frac{1}{2}, \quad I_3 = \pm \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad Y = 1. \quad (2.52)$$

Dieses Higgs-Feld  $\Phi$  besitzt vier Freiheitsgrade. Zur Lagrangedichte wird also ein kinetischer Term und ein Wechselwirkungsterm für das Higgs-Feld hinzugefügt und zusätzlich ein Potenzialterm, der die spontane Symmetriebrechung hervorruft:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \frac{\mu^2}{2} \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (2.53)$$

Dabei lautet die kovariante Ableitung des Higgs-Feldes

$$D_\mu \Phi = \left( \partial_\mu + ig \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \Phi. \quad (2.54)$$

Um SSB zu erreichen, wählt man  $\mu^2 < 0$ . Die physikalischen Felder werden festgelegt, indem man zunächst aus allen möglichen Minima des Higgs-Potenzials den Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes auswählt:

$$\langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad v := \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (2.55)$$

Die physikalischen Felder ergeben sich dann durch Entwicklung des Higgs-Potenzials um den Vakuumerwartungswert:

$$\Phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \phi(x) \end{pmatrix} e^{-i(\xi^a \tau^a)/2v}, \quad (2.56)$$

wobei die Exponentialfunktion unter Verwendung der Eichfreiheit eliminiert werden kann („Unitaritätseichung“). Das Feld  $\phi(x)$  ist das physikalische Higgs-Feld. Damit ist das Higgs-Teilchen im Standardmodell ein neutrales Spin-0-Teilchen.

### Massive Eichbosonen

Aus der kovarianten Ableitung  $|D_\mu \Phi|^2 = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)$  kann man nun die Massenterme für die Eichbosonen ablesen:

$$\mathcal{L}_{\text{Bosonmasse}} = \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{\mu,-} + (B^\mu, W^{\mu,0}) \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} g'^2 & -gg' \\ -gg' & g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^0 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Die dabei auftretende Massenmatrix wird diagonalisiert, um die physikalischen Eichbosonen zu erhalten:

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \quad \text{mit } \cos \theta_W := \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (2.58)$$

wobei  $\theta_W$  mit  $\sin^2 \theta_W \approx 0,23$  „schwacher Mischungswinkel“ oder „Weinberg-Winkel“ genannt wird. Damit lauten die Massenterme

$$\frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{\mu,-} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu + 0 \cdot A_\mu A^\mu. \quad (2.59)$$

Die elektroschwache Theorie besitzt also Massenterme für die  $W^\pm$ -Bosonen und das Z-Boson, während das Photon masselos bleibt. Mit anderen Worten, die SSB bricht die  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie, lässt aber die  $U(1)_{\text{em}}$  der QED intakt. Aus Gleichung (2.59) liest man ab:

$$m_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4}, \quad m_Z^2 = \frac{v^2}{4} (g^2 + g'^2). \quad (2.60)$$

Es ergibt sich somit der Zusammenhang  $m_W = m_Z \cos \theta_W$  oder

$$\rho_0 := \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1, \quad (2.61)$$

der letztlich eine Konsequenz der Wahl des Higgs-Feldes im SM ist. Da physikalische Modelle jenseits des SM  $\rho_0 \neq 1$  vorhersagen, stelle eine Messung von  $\rho_0$  einen wichtigen Test des Higgs-Sektors des SM dar.

### Fermionmassen

Die Massenterme der QED, z. B.  $-m\bar{e}e = -m(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)$  für Elektronen, sind nicht eichinvariant unter  $SU(2)_L$ . Die  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie erlaubt es aber, zusätzliche Terme in die Lagrangedichte einzufügen, die die Kopplung des Higgs-Feldes an die Fermionen beschreiben. Diese Terme sind „Yukawa-Kopplungen“, d. h. Kopplungen zwischen Fermionfeldern  $\psi$  und skalaren Feldern  $\phi$  der Form  $\bar{\psi}\phi\psi$ .<sup>2</sup> Aus solchen Termen

<sup>2</sup>Yukawa hat diese Terme zur Beschreibung der Kernkräfte durch den Austausch massiver Mesonen verwendet. Leitet man ein skalares Potenzial aus ihnen ab, so ergibt sich die Form des Yukawa-Potenzials  $e^{-r/\lambda}/r$ .

konstruiert man dann eichinvariante Massenterme, hier zunächst für Leptonen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= -\sqrt{2}f [\bar{L}\Phi R + \bar{R}(\Phi^T)^*L] \\ &\stackrel{\text{SSB}}{=} -f \left[ \bar{L} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} R + \bar{R}(0, \nu)L \right] = -fv\bar{e}e. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Es bleiben also nur Massenterme für die geladenen Leptonen übrig, die Neutrinos bleiben masselos. Für Quarks ist die Massenerzeugung etwas komplizierter, siehe Abschnitt 2.3.4.

### 2.3.3 Lepton-Wechselwirkungen der elektroschwachen Theorie

#### Elektromagnetische Wechselwirkung

Durch Einsetzen von  $A_\mu$  in die kovariante Ableitung in Gleichung (2.47) erhält man folgende Kopplung von  $A_\mu$  an den elektromagnetischen Strom:

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = q_e j_\mu^{\text{em}} A^\mu = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}\gamma_\mu e A^\mu. \quad (2.63)$$

Wenn man dies mit der Lagrangedichte der QED in Gleichung (2.26) vergleicht, kann man die Ladung des Elektrons durch die Kopplungskonstanten  $g$  und  $g'$  der elektroschwachen Theorie ausdrücken:

$$q_e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W. \quad (2.64)$$

#### Geladene Ströme

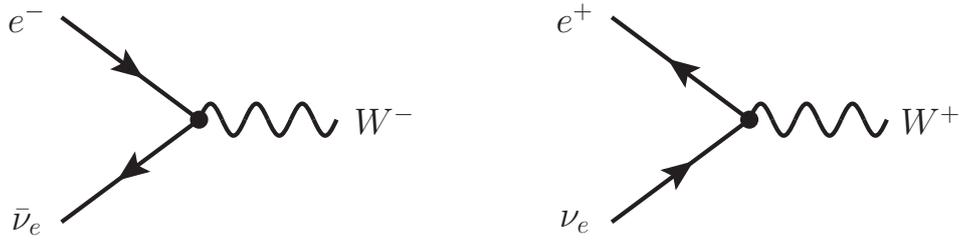
Entsprechend ergeben sich auch die geladenen  $V-A$ -Ströme (charged currents, CC), die schon aus der schwachen Wechselwirkung bekannt sind. In der elektroschwachen Wechselwirkung ist hierbei Fermis Kontaktwechselwirkung durch die Kopplung an die  $W$ -Bosonen ersetzt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CC}} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[ J_\mu^{+\text{CC}} W^{\mu,-} + J_\mu^{-\text{CC}} W^{\mu,+} \right] \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[ \left( \bar{\nu}_e \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) e \right) W^{\mu,-} + \left( \bar{e} \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \nu_e \right) W^{\mu,+} \right]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Die Feynman-Diagramme zu den CC-Kopplungen sind in Abb. 2.4 gezeigt. Wenn man die CC der elektroschwachen Wechselwirkung mit der Kontaktwechselwirkung der  $V-A$ -Theorie vergleicht, erhält man

$$\left( \frac{g}{2\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{m_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{1}{\sqrt{2} G_F}, \quad (2.66)$$

wobei  $G_F$  die Fermi-Konstante der schwachen Wechselwirkung ist. Der Term  $1/m_W^2$  deutet auf einen  $W$ -Boson-Propagator hin. Da  $G_F = 1,16637(1) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  aus Messungen etwa des Myonzerfalls sehr genau bekannt ist, kann man den Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes, also die typische Energieskala der elektroschwachen Wechselwirkung, bestimmen,  $v \approx 246 \text{ GeV}$ .



**Abbildung 2.4:** Kopplung der Leptonen an das  $W$ -Boson in der elektroschwachen Wechselwirkung mittels geladener Ströme.

### Neutrale Ströme

Die Existenz neutraler Ströme (neutral currents, NC), also Kopplung der Fermionen an das  $Z$ -Boson, ist eine Vorhersage der elektroschwachen Theorie, die noch nicht in der  $V-A$ -Theorie enthalten war. Die Kopplung der Leptonen an das  $Z$ -Boson ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{NC}} &= -\frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} J_{\mu}^{\text{NC}} Z^{\mu} \\ &= -\frac{g}{2 \cos \theta_W} \left[ \bar{\nu}_e \gamma_{\mu} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \nu_e - \bar{e} \gamma_{\mu} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) e + 2 \sin^2 \theta_W (\bar{e} \gamma_{\mu} e) \right] Z^{\mu}.\end{aligned}\quad (2.67)$$

Damit enthalten NC-Wechselwirkungen linkshändige Kopplungen an Neutrinos und Elektronen, für letztere aber auch eine Beimischung elektromagnetischer Kopplungen  $\sim 2 \sin^2 \theta_W j_{\mu}^{\text{em}}$ .

### 2.3.4 Quark-Wechselwirkungen der elektroschwachen Theorie

Für Quarks sind die Wechselwirkungen der elektroschwachen Theorie komplizierter als für Leptonen. Das hängt damit zusammen, dass alle Quarks  $u, d, c, s, t, b$  massiv sind und die Masseneigenzustände nicht die Eigenzustände der elektroschwachen Wechselwirkung sind. Ohne den Effekt der Quarkmischung sind die  $SU(2)_L$ -Multipletts gegeben durch

$$Q_L := \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad u_R, \quad d_R \quad (2.68)$$

mit den Hyperladungen  $Y(Q_L) = 1/3$ ,  $Y(u_R) = 4/3$  und  $Y(d_R) = -2/3$ .

### Yukawa-Kopplung

Da die  $u$ -Quarks im SM im Gegensatz zu den Neutrinos massiv sind wird für sie ein weiterer Term in der Yukawa-Kopplung benötigt, insgesamt ergibt sich dann

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -f_u (\bar{Q}_L \tilde{\Phi} u_R) - f_d (\bar{Q}_L \Phi d_R) + \text{h.c.} \quad (2.69)$$

Dabei benötigt man keine Erweiterung des Higgs-Sektors, denn für die  $u$ -Quarks kann man  $\tilde{\Phi} = i\tau^2 \Phi^*$  verwenden. Darüber hinaus wird die Yukawa-Kopplung für Quarks durch die Quarkmischung eine Matrixgleichung

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -f_u^{\alpha\beta} (\bar{Q}_L^{\alpha} \tilde{\Phi} u_R^{\beta}) - f_d^{\alpha\beta} (\bar{Q}_L^{\alpha} \Phi d_R^{\beta}) + \text{h.c.} \quad (2.70)$$

Die Massenparameter werden also zu Matrizen, durch deren Diagonalisierung man die Massen der physikalischen Teilchen erhält.

### Geladene und neutrale Ströme

Durch die Diagonalisierung der Massenmatrix erhält man im geladenen Quarkstrom die CKM-Mischungsmatrix  $V_{\text{CKM}}$ :

$$J_{\mu}^{+\text{CC}} = (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}) \gamma_{\mu} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) V_{\text{CKM}} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Die neutralen Ströme haben dieselbe Dirac-Struktur wie der kinetische Term  $\bar{u}\not{\partial}u$ . Damit bleiben sie wie dieser bei der Diagonalisierung der Massenmatrix unbeeinflusst. Der neutrale Strom für Quarks lautet somit:

$$\begin{aligned} J_{\mu}^{\text{NC}} &= (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}) \left[ \gamma_{\mu} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \gamma_{\mu} \right] \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \\ &\quad - (\bar{d}, \bar{s}, \bar{b}) \left[ \gamma_{\mu} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \gamma_{\mu} \right] \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

### 2.3.5 Vektor- und Axialvektorkopplungen

Aus Gleichung (2.71) ergibt sich, dass geladene Ströme reine  $V-A$ -Ströme sind. Die Struktur der neutralen Ströme wird dadurch transparenter, d. h. man kann sie in links- und rechtshändige Kopplungen und/oder Vektor- und Axialvektoranteile zerlegt. Man setzt für beliebige Fermionen  $f$  (Leptonen oder Quarks) an mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NC}} &\sim \left[ g_R^f (\bar{f} \gamma_{\mu} \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) f) + g_L^f (\bar{f} \gamma_{\mu} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) f) \right] Z^{\mu} \\ &= \left[ \frac{g_R^f + g_L^f}{2} (\bar{f} \gamma_{\mu} f) - \frac{g_R^f - g_L^f}{2} (\bar{f} \gamma_{\mu} \gamma_5 f) \right] Z^{\mu} \\ &=: \left[ g_V^f (\bar{f} \gamma_{\mu} f) - g_A^f (\bar{f} \gamma_{\mu} \gamma_5 f) \right] Z^{\mu}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit Gleichungen (2.67) und (2.72) erhält man so folgende Kopplungen:

$$g_V^f = I_3^f - 2q_f \sin^2 \theta_W, \quad (2.74)$$

$$g_A^f = I_3^f. \quad (2.75)$$

In der elektroschwachen Theorie besitzen neutrale Ströme also keine reine  $V-A$ -Struktur wie geladene Ströme. Messungen von  $g_V^f$  und  $g_A^f$  stellen somit einen Test der elektroschwachen Theorie dar.