

Übung zur Vorlesung Struktur der Materie (c)
”Kern- und Elementarteilchenphysik”

WS 2001/2002

H. Kolanoski, C. Stegmann

Blatt 2

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Die Gamma-Matrizen erfüllen folgende Anti-Kommutator-Relation: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Rechnen Sie ohne Wahl einer konkreten Darstellung nach:

- a) $(\gamma^0)^2 = Id$, $(\gamma^i)^2 = -Id$, $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \cdot Id$
- b) $\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu$ für $\mu \neq \nu$
- c) $(\gamma^5)^2 = Id$ mit $\gamma^5 := \gamma_5 := i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$
- d) $\text{Sp}(\gamma^5) = 0$, $\text{Sp}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n-1}}) = 0$, mit $n = 1, 2, 3, \dots$
- e) $\text{Sp}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$

Die Spur einer Matrix A ist definiert als $\text{Sp}(A) = \sum_i A_{ii}$.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Gesucht sind einfache Lösungen der Dirac-Gleichung:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

- a) Suchen Sie zuerst Lösungen der Dirac-Gleichung für ein ruhendes Teilchen, d.h. $\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0$ für $i = 1, 2, 3$. Schreiben Sie das Gleichungssystem hin. Wieviele Lösungen erhalten Sie?
- b) Suchen Sie jetzt als Lösungen ebene Wellen der Form:

$$\psi(x) = N e^{\pm i x \cdot p} u(p)$$

Hier ist N eine Normierungskonstante und x und p 4er-Vektoren. Zeigen Sie, dass $u(p)$ die Dirac-Gleichung im Impulsraum erfüllen muss, d.h. $(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0$. Setzen Sie $u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$ an, wobei u_A und u_B zweikomponentige Vektoren sind. Berechnen Sie $(\gamma^\mu p_\mu - m)u$ explizit für den obigen Ansatz und bestimmen Sie die Funktionen $f(E, \vec{p})$ und $f'(E, \vec{p})$ mit $u_A = f(E, \vec{p})u_B$ und $u_B = f'(E, \vec{p})u_A$. Was ergibt sich für $f(E, \vec{p}) \cdot f'(E, \vec{p})$?

- c) Konstruieren Sie vier unabhängige Lösungen, indem Sie u_B für $u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
bzw. u_A für $u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnen.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Dirac-Gleichung, dass für den Dirac-Strom $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ Stromerhaltung gilt, d.h.

$$\partial^\mu j_\mu = 0.$$