

Kapitel 6

Sternentwicklung

Wir wollen uns in diesem Kapitel einen kurzen Überblick über die Bildung, die Entwicklung und das Vergehen von Sternen verschaffen. Vor allem in der letzten Phase, dem Sterben von Sternen, können bei genügend großer Masse gewaltige Energieumsetzungen stattfinden, die Quellen hochenergetischer kosmischer Strahlung sind.

Wir gehen davon aus, dass das Universum kurz nach dem Urknall im Wesentlichen homogen und isotrop war, mit geringen Dichtefluktuationen (siehe Kapitel 2). Heute sieht man, dass die Materie geklumpt in Form von Sternen, Galaxien und Galaxien-Clustern, also mit Strukturen auf unterschiedlichen Skalen, erscheint. Wir wollen in diesem Kapitel folgenden Fragen nachgehen:

- Unter welchen Bedingungen bilden sich Strukturen?
- Unter welchen Bedingungen bilden sich Sterne mit einer quasi-statischen Energieabstrahlung?
- Unter welchen Bedingungen kommt es zum katastrophalen Kollaps eines ausgebrannten Sterns?
- Welche Zustände werden unter welchen Bedingungen am Ende eines Sternlebens erreicht?

6.1 Strukturbildung

6.1.1 Gravitative Instabilität

Wir betrachten ein mehr oder weniger gleichverteiltes Gas (meistens H oder H₂), in dem es kleine Dichtefluktuationen geben soll. Unter welchen Bedingungen verstärkt sich die Fluktuation durch gravitative Kontraktion?

Unter den im Folgenden diskutierten Bedingungen können wir das Gas mit der idealen Gasgleichung beschreiben:

$$pV = nkT \implies p_{gas} = \frac{\rho}{m} kT. \quad (6.1)$$

Dabei sind n , ρ die Teilchen- und Massendichten und m die Masse der Teilchen. Wenn wir ein Gebiet mit der Gesamtmasse M betrachten, ist die gesamte kinetische

Energie:

$$E_{kin} = \frac{3}{2} \frac{M}{m} k T \quad (6.2)$$

Gegen den Gasdruck wirkt der gravitative Druck. Der Druck im Mittelpunkt einer homogenen Kugel von Radius R und Masse M ist:

$$p_{grav} = \frac{3}{8} \frac{G M^2}{\pi R^4} \quad (6.3)$$

Die entsprechende potentielle Energie der gesamten Kugel ist:

$$E_{grav} = -\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R} \quad (6.4)$$

Der Vorfaktor, hier $3/5$, für eine homogene Kugel, hängt sehr von der geometrischen Dichteverteilung ab und ist für die folgenden Schlußfolgerungen nicht wichtig.

Als Kriterium, wann die Wolke kondensiert, kann man entweder den Energiesatz benutzen [10],

$$E_{kin} + E_{grav} < 0, \quad (6.5)$$

oder das Druckgleichgewicht [8],

$$p_{gas} < p_{grav}. \quad (6.6)$$

Mit (6.1) und (6.3) ergibt sich aus dem Druckgleichgewicht:

$$\frac{\rho}{m} k T < \frac{3}{8} \frac{G M^2}{\pi R^4} \implies M > \frac{2kT R}{Gm} \quad (6.7)$$

Der Radius der Wolke läßt sich durch Masse und Dichte ausdrücken:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \implies R = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{M}{\rho} \right)^{1/3} \quad (6.8)$$

Damit ergibt sich aus (6.7) in Abhängigkeit von Dichte und Temperatur eine Grenzmasse, oberhalb der eine Dichtefluktuation instabil wird und kontrahiert:

$$M_{grenz} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left(\frac{kT}{Gm} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (6.9)$$

Auf einem etwas anderen Weg hat Jeans eine Grenzmasse M_J in Abhängigkeit von einer typischen Ausdehnung der Materieansammlung λ_J abgeleitet. **Jeans-Masse und -Länge** sind gegeben durch:

$$M_J = \frac{\pi}{6} \rho \lambda_J^3 \quad (6.10)$$

$$\lambda_J = v_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}. \quad (6.11)$$

Dabei ist

$$v_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \quad (6.12)$$

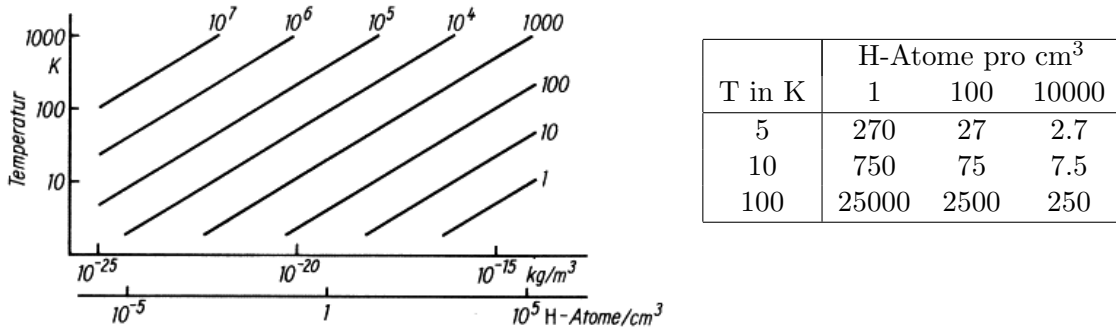


Abbildung 6.1: Zum Jeans-Kriterium: kritische Masse in Einheiten der Sonnenmasse in Abhängigkeit von Temperatur und Dichte.

die Schallgeschwindigkeit, mit der sich Störungen in dem Medium ausbreiten. Für ein ideales Gas gilt:

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma kT}{m}} \quad (6.13)$$

mit dem Adiabatenkoeffizienten γ . Für ein einatomiges Gas mit $\gamma = 5/3$ erhält man dann für die Jeans-Länge:

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{5\pi kT}{3mG\rho}} \quad (6.14)$$

und damit für die Jeans-Masse:

$$M_J \sim \left(\frac{kT}{Gm}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (6.15)$$

Das entspricht bis auf die Vorfaktoren der Grenzmasse in (6.9), die wir mit einer vereinfachenden Überlegung erhalten hatten. Nach dem **Jeans-Kriterium** wird eine Massenansammlung M instabil, wenn die Jeans-Masse überschritten wird, wenn also gilt (Abb. 6.1):

$$M > M_J. \quad (6.16)$$

Bedeutung des Jeans-Kriteriums: In [11] ist eine physikalische Begründung für die Abhängigkeit der Jeans-Länge von der Schallgeschwindigkeit gegeben: kleine Fluktuationen $\Delta\rho/\rho$ verstärken sich, wenn die Gravitationskraft pro Masse die Druckkraft pro Masse übersteigt (die charakteristische Ausdehnung der Fluktuation sein λ):

$$F_{grav} \approx \frac{GM}{\lambda^2} \approx \frac{G\rho\lambda^3}{\lambda^2} > F_{gas} \approx \frac{p\lambda^2}{\rho\lambda^3} \approx \frac{v_s^2}{\lambda} \quad (6.17)$$

$$\implies \lambda > v_s \sqrt{\frac{1}{G\rho}} \approx \lambda_J \quad (6.18)$$

Das bedeutet: wenn die Ausdehnung λ einer Dichtefluktuation größer als die Jeans-Länge ist, kann sich eine Störung nicht mehr schnell genug ausgleichen (mit der

Geschwindigkeit v_s) und es kommt zum gravitativen Kollaps. Die gleiche Interpretation ergibt sich, wenn man die Zeit t_{ff} für den freien Fall einer Masse m im Abstand R von einer Masse M betrachtet. Bei dem Fall wird potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt:

$$\Delta E_{pot} = \Delta E_{kin} \implies GMm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \quad (6.19)$$

Daraus erhält man die Freifallzeit:

$$t_{ff} = \int_R^0 \frac{dr}{dr/dt} = \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_R^0 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}} dr = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}} \quad (6.20)$$

Dabei wurde $\rho = M/(4/3\pi R^3)$ benutzt. Der Vergleich mit der Definition der Jeans-Länge in (6.11) zeigt:

$$t_{ff} \sim \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}} = \frac{\lambda_J}{v_s} = \tau_{HD} \quad (6.21)$$

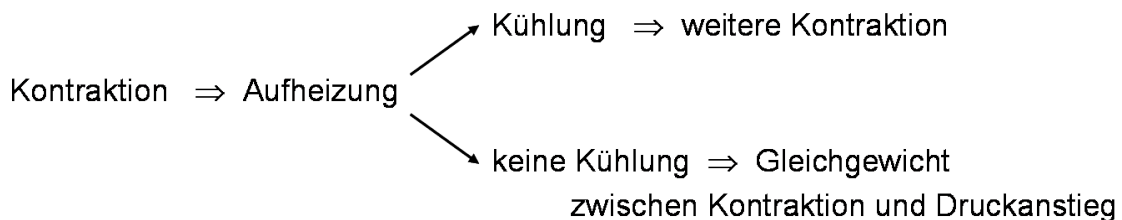
Zu einer Instabilität, einem Kollaps, kommt es, wenn die 'hydrodynamische Zeit' τ_{HD} , mit der sich eine Störung ausgleichen könnte, größer als die Freifallzeit ist:

$$t_{ff} < \tau_{HD} \quad (6.22)$$

6.2 Entwicklungsstadien von Sternen

6.2.1 Protosterne

Aus Dichtefluktuationen, die nach dem Jeans-Kriterium gravitativ instabil sind, bilden sich so genannte Protosterne. Bei der Kontraktion der Massen wird die potentielle Gravitationsenergie in kinetische Energie der Masseteilchen umgewandelt. Andererseits kann Kühlung durch Abstrahlung oder interne Energieabsorption, zum Beispiel durch Dissoziation von H_2 -Molekülen oder die Ionisation von Wasserstoff, erfolgen. Die Kühlung wird gestoppt und die Temperatur steigt, wenn die Zeitskalen für Kühlungsprozesse groß gegen die Kontraktionszeit werden, zum Beispiel, wenn die Massenwolke für die Strahlung dicht wird, und wenn keine innere Energieumsetzung möglich ist. Schematisch ist der Ablauf also:



Die verschiedenen Phasen der Kontraktion sind in Abbildung 6.2 dargestellt:

- Erster dynamischer Kollaps: Kühlung durch Emission von Strahlungsenergie.

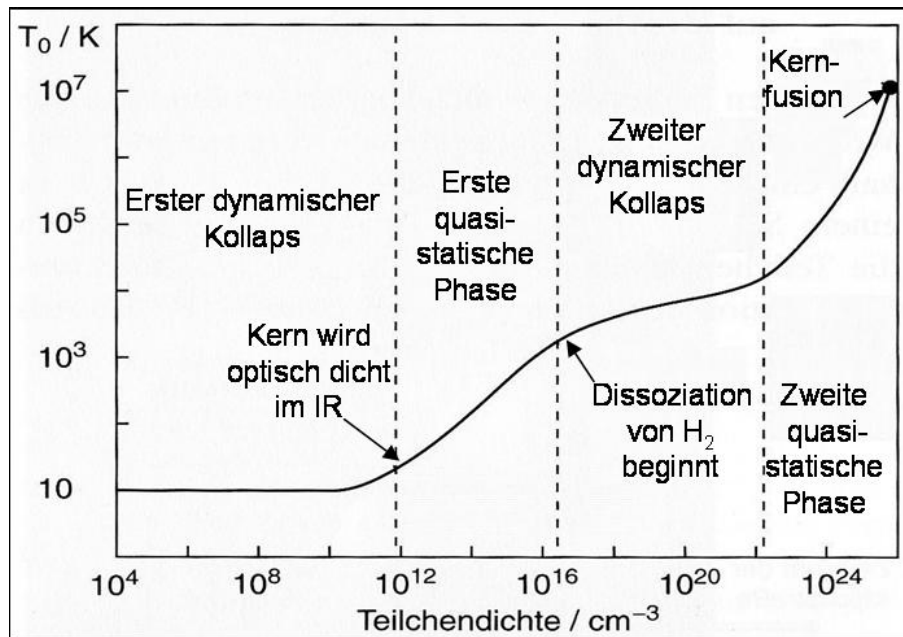
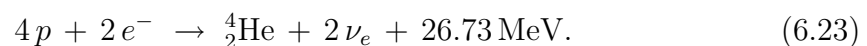


Abbildung 6.2: Temperatur-Dichte-Entwicklung einer Massenkontraktion, die zu einem Protostern und schließlich einem Stern auf der Hauptreihe (siehe nächster Abschnitt) führt.

- Erste quasistatische Phase: Stern wird optisch dicht im Infraroten, die Kontraktion erfolgt adiabatisch (ohne Energieabgabe nach außen), in dieser Phase hat sich der 'Protostern' gebildet.
- Zweiter dynamischer Kollaps: Kühlung durch Dissoziation von H_2 -Molekülen und Ionisation von Wasserstoff.
- Zweite quasistatische Phase: hydrostatisches Gleichgewicht im ionisierten Gas: Kontraktion führt zu Anwachsen des Gas- und Strahlungsdruckes.
- Bei genügend Masse kann sich der Stern weiter aufheizen bis zur Kernfusion und hat sich damit zu einem Stern entwickelt.

6.2.2 Kernfusion: Wasserstoffbrennen

Da die Bindungsenergie pro Nukleon ein Maximum etwa bei der Kernmasse von Eisen hat (Abb. 6.3), ist die Fusionsreaktion von Kernen unterhalb von Eisen exotherm. Allerdings müssen die Kerne genügend kinetische Energie haben, um den Coulomb-Wall zu überwinden, beziehungsweise zu durchtunneln. Bei Temperaturen von etwa 10^7 K setzt dann als erstes das Wasserstoffbrennen ein, bei dem über verschiedenen Reaktionswege schließlich Wasserstoff zu Helium fusioniert wird (siehe Details dazu in dem Abschnitt über solare Neutrinos 5.2.1). Die Bilanzgleichung lautet (5.3):



Das Wasserstoffbrennen verläuft hauptsächlich über den pp-Zyklus, der ausführlicher in Abschnitt 5.2.1 diskutiert wurde (Überblick in Abb. 6.4).

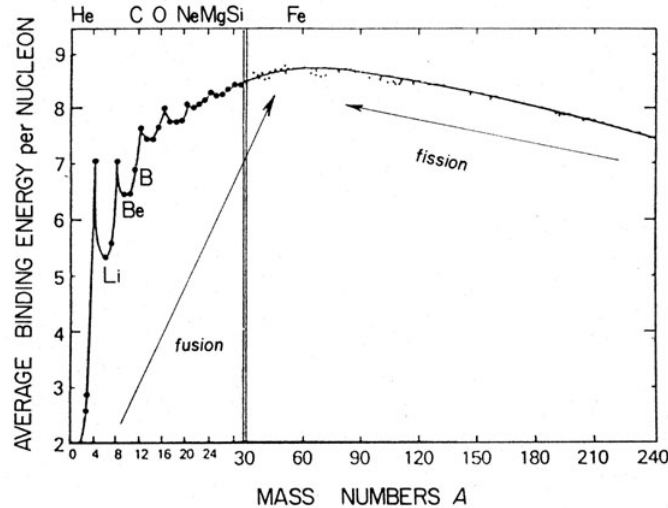


Abbildung 6.3: Bindungsenergie pro Nukleon in Abhängigkeit von der Massenzahl A. Das Maximum liegt bei $A=56$; bei kleinerem A ist Fusion, bei größerem A Spaltung exotherm.

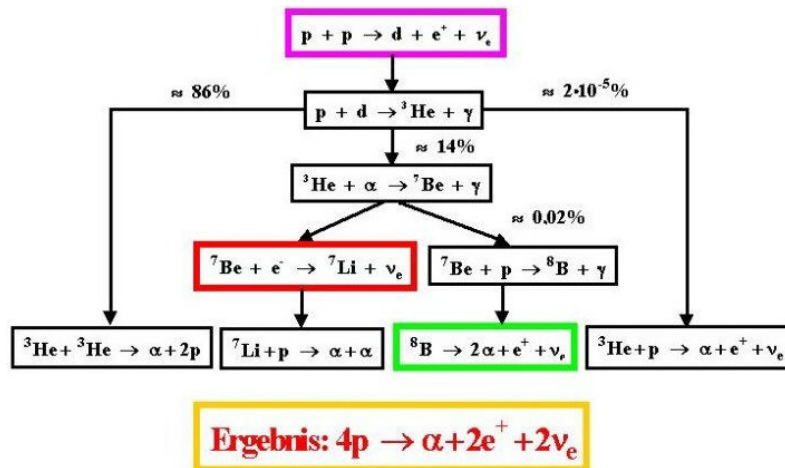


Abbildung 6.4: Der Wasserstoff-Zyklus der Sonne.

Die Energieproduktion in Sternen wie der Sonne verläuft über lange Zeiträume sehr gleichmäßig. Das liegt daran, dass der Beginn der Reaktionskette durch einen sehr langsamen Prozess, die Verschmelzung von zwei Protonen zu Deuterium, kontrolliert wird:



pp-Reaktionswahrscheinlichkeit: Die Protonen in (6.24) müssen die elektrostatische Abstoßung überwinden. Die Höhe des Coulomb-Walls (Abb. 6.5) ist:

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r_0} \quad \Rightarrow \quad V_0 = 0.6 \text{ MeV} \quad \text{mit } r_0 = 1.2 \text{ fm} \quad (6.25)$$

Andererseits ist die mittlere kinetische Energie der Protonen $kT \approx 1 \text{ keV}$, so dass nur der hochenergetische Ausläufer der Maxwell-Verteilung zu der Reaktion beitragen

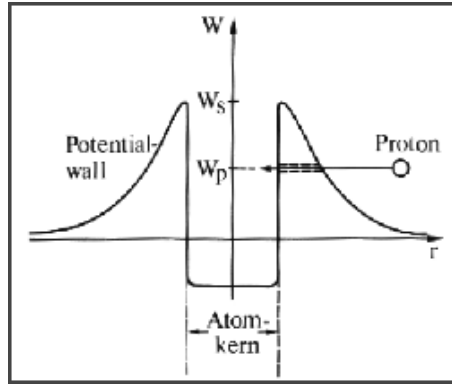


Abbildung 6.5: Kernpotential mit Coulomb-Wall, der bei der Kernfusion von den Kernen durchtunnelt werden muß.

wird. Die Wahrscheinlichkeit für eine pp-Reaktion hängt von dem Überlapp der Maxwell-Verteilung $F(E)$ mit der Tunnelwahrscheinlichkeit $P(E)$ ab:

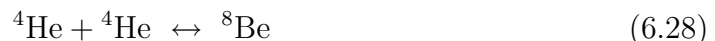
$$F(E) = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad (6.26)$$

$$P(E) = \exp\left(-\sqrt{\frac{E_G}{E}}\right), \quad \text{mit } E_G = 2m_r (\pi \alpha Z_1 Z_2)^2 \quad (6.27)$$

Hier ist ($m_r = m_p/2$) die reduzierte Masse des pp-Systems. Die Gamow-Energie ist für pp-Stöße $E_G = 0.49 \text{ MeV}$. Während die Maxwell-Verteilung steil mit E abfällt, wächst die Tunnelwahrscheinlichkeit erst bei höheren Energien steil an. Der Überlappungsbereich bestimmt dann die geringe Wechselwirkungswahrscheinlichkeit (Abb. 6.6). Zusammen mit dem geringen Wirkungsquerschnitt für die pp-Reaktion (6.24) von $\sigma \approx 10^{-43} \text{ cm}^2$ und einer typischen Dichte von $\rho = 10^5 \text{ kg/m}^3$ ergibt sich eine typische Verbleibzeit für ein Proton im Stern von $\tau^{pp} = O(10^9 \text{ a})$.

6.2.3 Heliumbrennen und C, O-Produktion

Wenn der Wasserstoff verbrannt ist und einen Heliumkern im Stern gebildet hat, kann der Stern sich weiter kontrahieren und damit die Temperatur erhöhen. Wenn die Masse mehr als etwa eine halbe Sonnenmasse ist, wird die Temperatur von etwa 10^8 K erreicht, die zum Heliumbrennen notwendig ist. Für diese Fusionsstufe hat die Natur allerdings eine Schwierigkeit eingebaut: es gibt kein stabiles Nuklid mit der Massenzahl $A=8$, das man einfach aus zwei Heliumkernen aufbauen könnte (Abb. 6.7). Die aus Helium endotherm (-92 keV) gebildeten ${}^8\text{Be}$ -Kerne zerfallen sehr schnell ($\tau_{\text{Be}} = 2.6 \cdot 10^{-16} \text{ s}$) wieder in Heliumkerne und nur eine geringe Anzahl ${}^8\text{Be}$ -Kerne verbleibt in der Gleichgewichtsreaktion:



Wegen der kurzen ${}^8\text{Be}$ -Lebensdauer müssen drei Heliumkerne fast gleichzeitig wechselwirken (Triple- α -Prozess), damit mit einer kleinen Wahrscheinlichkeit Kohlenstoff in einem Anregungszustand produziert werden kann:



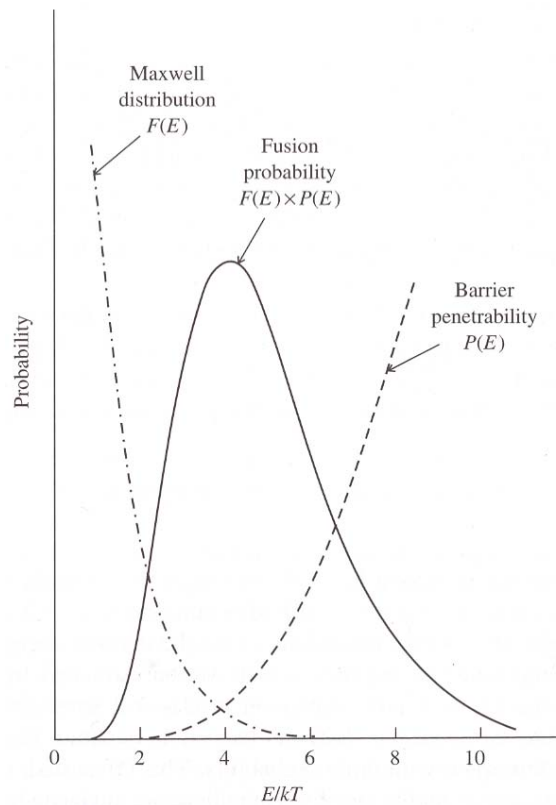


Abbildung 6.6: Energieabhängigkeiten der Maxwell-Verteilung und Tunnelwahrscheinlichkeit, die die Geschwindigkeit von Fusionsprozessen bestimmen.

Halbwertszeit		p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
			H	He	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne	Na	Mg	Al	Si		
El	$< 10^{-10}$ Sekunden																	
El	< 1 Minute	n																
El	1 Minute bis 1 Stunde	0		^1H														
El	1 Stunde bis 1 Tag	1	n	^2H	^3He	^4Li												
El	1 Tag bis 60 Tage	2		^3H	^4He	^5Li	^6Be	^7B	^8C									
El	60 Tage bis 10 Jahre	3		^4H	^5He	^6Li	^7Be	^8B	^9C	^{10}N								
El	10 Jahre bis 1.000 Jahre	4			^6He	^7Li	^8Be	^9B	^{10}C	^{11}N	^{12}O							
El	1.000 Jahre bis 100.000 Jahre	5			^7He	^8Li	^9Be	^{10}B	^{11}C	^{12}N	^{13}O	^{14}F						
El	100.000 Jahre bis 10.000.000 Jahre	6			^8He	^9Li	^{10}Be	^{11}B	^{12}C	^{13}N	^{14}O	^{15}F	^{16}Ne					
El	10.000.000 bis 50.000.000 Jahre	7				^{10}Li	^{11}Be	^{12}B	^{13}C	^{14}N	^{15}O	^{16}F	^{17}Ne	^{18}Na				
El	primordiales Nuklid ($> 50.000.000$ Jahre)	8				^{11}Li	^{12}Be	^{13}B	^{14}C	^{15}N	^{16}O	^{17}F	^{18}Ne	^{19}Na	^{20}Mg			
El	Stabil																	

Abbildung 6.7: Ausschnitt aus der Nuklidkarte, der zeigt, dass es keine stabilen Nuklide mit $A=8$ gibt. Aus: <http://de.wikipedia.org/wiki/Nuklidkarte>

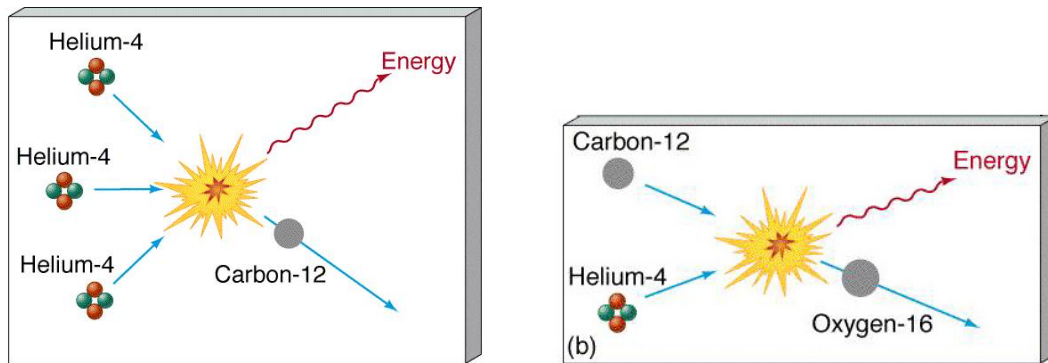
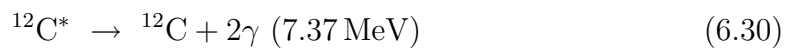


Abbildung 6.8: Die Produktion von Kohlenstoff durch den Triple- α - Prozess (links) und die Produktion von Sauerstoff (rechts).

Mit einem Verzweungsverhältnis von $B_{\gamma\gamma}(^{12}\text{C}^*) = 3 \cdot 10^{-12}$ kann der angeregte Kern dann in den Grundzustand übergehen:



Schließlich kann dann noch Sauerstoff gebildet werden:



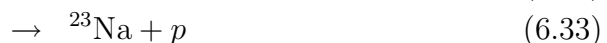
Die Rate für die Sauerstoffproduktion ist nicht sehr hoch, gerade so, dass ^{12}C und ^{16}O etwa gleich häufig erzeugt werden. Damit sorgt diese Reaktionskette gerade für die Häufigkeit der Elemente, die für unser Leben am wichtigsten sind.

6.2.4 Produktion schwerer Elemente

Wenn Sterne genügend massiv sind, können sie aufeinanderfolgend immer schwerere Elemente erzeugen. Die notwendigen höheren Temperaturen müssen jeweils schrittweise nach Ausbrennen eines Elements oder einer Elementgruppe durch gravitative Kontraktion gewonnen werden. Auf diese Weise können Elemente bis Eisen ($A=56$) gebildet werden, ohne dass eine weitere Hürde wie bei $A=8$ auftritt.

Da die höchsten Temperaturen jeweils im Zentrum des Sterns erreicht werden, bildet sich eine Schalenstruktur mit den schwersten Elementen im Inneren (Abb. 6.9).

Kohlenstoffbrennen setzt bei einer Temperatur und Dichte von etwa $T \approx 5 \cdot 10^8 \text{ K}$ und $\rho \approx 3 \cdot 10^9 \text{ kg m}^{-3}$ ein (Abb. 6.10):



Sauerstoffbrennen setzt erst bei höheren Temperaturen, $T \approx 2 \cdot 10^9 \text{ K}$ ein:



Bei diesen hohen Temperaturen treten Photonen im MeV-Bereich auf, die bereits gebildete schwere Kerne spalten können. Nur deshalb kann im Sterninneren eine

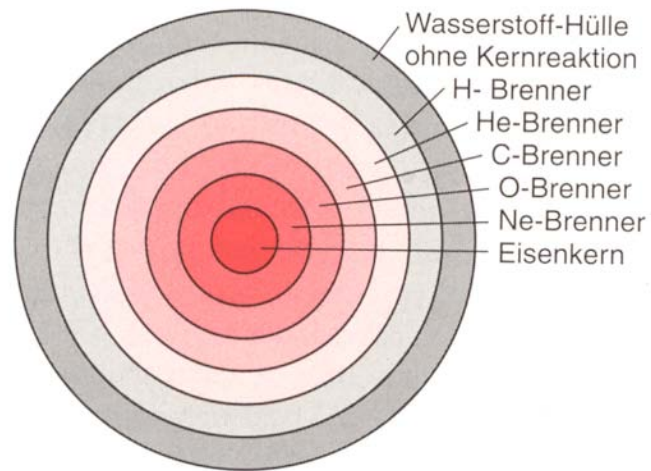


Abbildung 6.9: Schalenstruktur des Brennens verschieden schwerer Elemente in einem Stern.

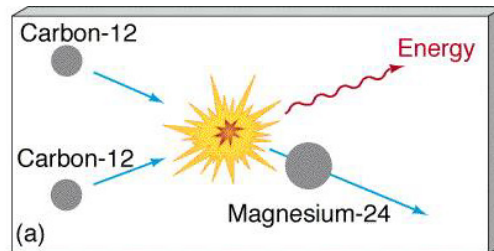


Abbildung 6.10: Kohlenstoffbrennen.

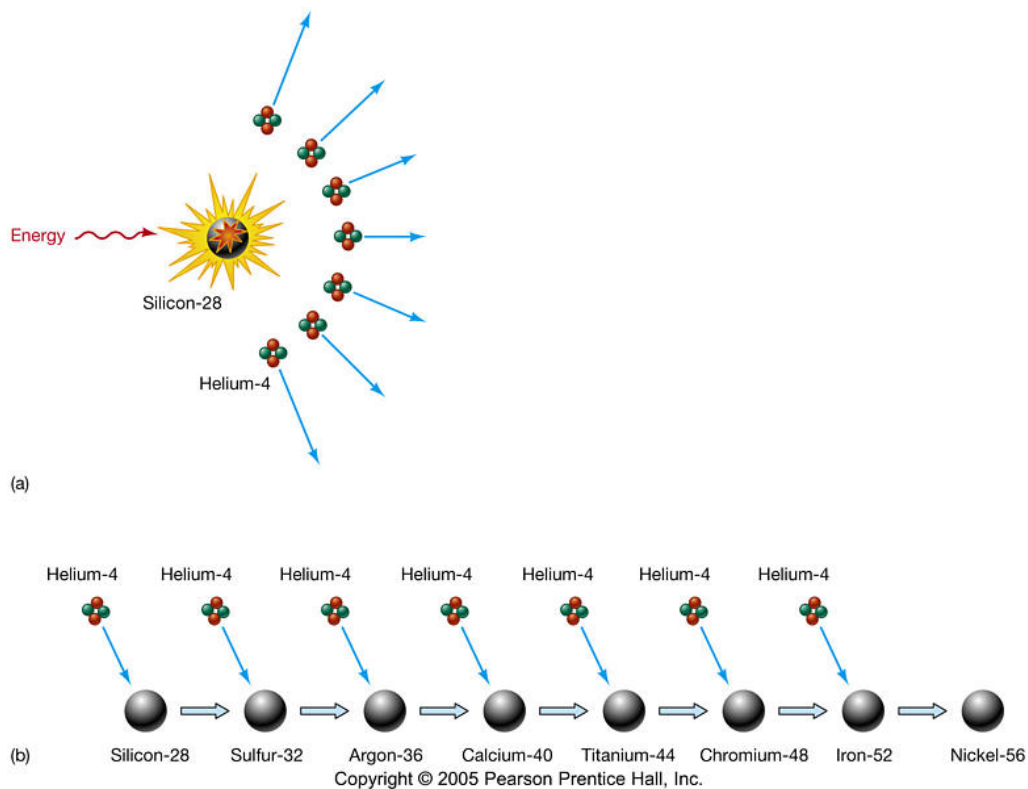


Abbildung 6.11: Schematische Darstellung der Produktion schwerer Elemente.

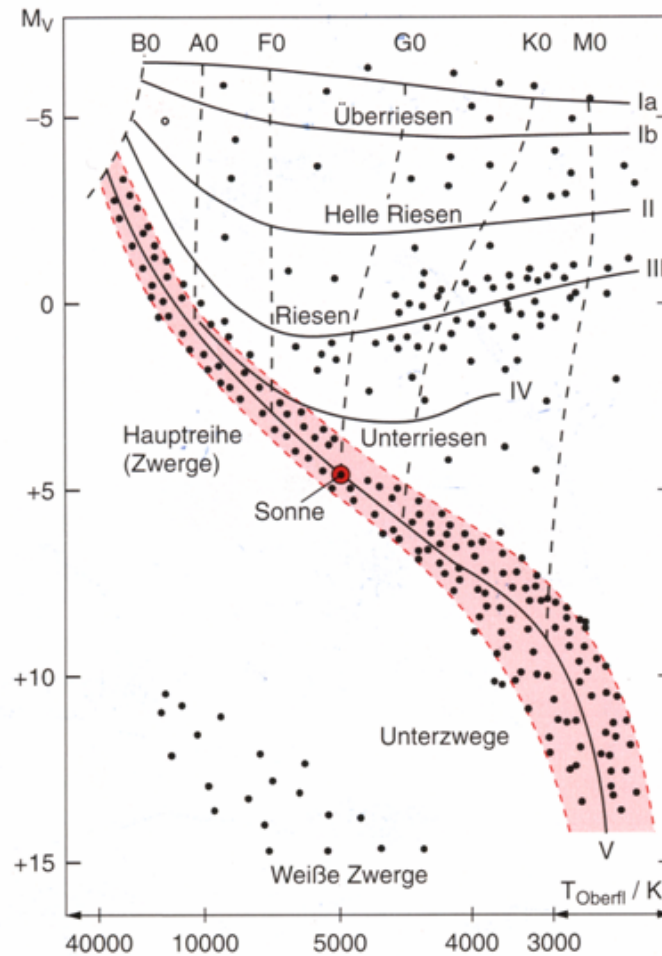


Abbildung 6.12: Beispiel für ein Hertzsprung-Russel-Diagramm. Die absolute Helligkeit (gemessen in Magnituden) ist gegen die Oberflächentemperatur (etwa entsprechend den Spektralklassen, die in dem Diagramm oben angegeben sind) aufgetragen.

effiziente Verbrennung bis zum Maximum der Bindungsenergie erfolgen. Mit Gammaenergien oberhalb von etwa 9 MeV kann zum Beispiel Silizium gespalten werden:



Mit dem so erzeugten Helium können dann die Elemente S, Ar, Ca, Fe, Ni, ... gebildet werden (Abb. 6.11).

6.2.5 Hertzsprung-Russel-Diagramm

In dem Hertzsprung-Russel-Diagramm (HRD) trägt man die absolute Helligkeit gegen die Oberflächentemperatur (entspricht einer Spektralklasse bei astronomischen Beobachtungen) von Sternen auf (Abb. 6.12). Die absolute Helligkeit ist die scheinbare (= beobachtete) Helligkeit, die man messen würde, wenn sich der Stern in einer Entfernung von 10 pc (also $10 \cdot 3.26$ Lichtjahren) befinden würde. Die Helligkeit wird in der Astronomie häufig in Magnituden angegeben:

$$m = -2.5 \cdot \log F/F_0, \quad (6.37)$$

wobei F die gemessene Flussdichte der elektromagnetischen Strahlung (oder eines Teils des Spektrums) und F_0 ein Referenzfluss mit $m = 0$ ist ($m = 0$ entspricht etwa der Helligkeit des Sterns Wega). Die absolute Magnitude wird dann berechnet zu:

$$M = m + 2.5 \cdot \log \left(\frac{(10 \text{ pc})^2}{r^2} \right). \quad (6.38)$$

Es mag gewöhnungsbedürftig sein, dass größere Magnituden kleineren Helligkeiten entsprechen.

Aus der absoluten Helligkeit läßt sich direkt die Leuchtkraft, die gesamte Strahlungsleistung des Sterns, bestimmen. Über das Stefan-Boltzmann-Gesetz sind Leuchtkraft, Oberfläche und Oberflächentemperatur eines Sterns in der Schwarzkörper-Näherung miteinander verbunden ($\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$):

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (6.39)$$

Die meisten Sterne liegen auf der so genannten Hauptreihe, auf der die Leuchtkraft monoton mit der Temperatur ansteigt. Auf der Hauptreihe liegen die stabil Wasserstoff verbrennenden Sterne, die sich im wesentlichen nur durch ihre Massen unterscheiden. Die Leuchtkraft ist abhängig von der Masse, da in (6.39) sowohl R als auch T von der Masse abhängen. Empirische ergibt sich etwa:

$$L \sim M^{3.5} \quad (6.40)$$

Nach Ausbrennen des Wasserstoffs im Kern bewegen sich die Sterne je nach Masse auf unterschiedlichen Trajektorien, was im folgenden Abschnitt besprochen werden soll.

6.3 Stabilitätsgrenzen von Sternen

Wen die Energiegewinnung durch Fusion aufhört, abhängig von der Masse spätestens bei Eisen, müssen die Temperatur und der Druck sinken und der Stern wird kollabieren. Welches Schicksal er weiter erfährt, hängt von der Masse ab. Eine Übersicht der verschiedenen Entwicklungswege zeigt Abb. 6.13. Nur wenn der Stern eine Masse von mindestens 5 Sonnenmassen hat (abhängig vom Drehimpuls), kollabiert er ungebremst in ein Schwarzes Loch. Für geringere Massen wird der Kollaps durch den Entartungsdruck von Elektronen oder Neutronen abgebremst. Diese Endzustände der Sternentwicklung sollen in diesem Abschnitt diskutiert werden.

6.3.1 Elektronenentartungsdruck

Bei einem Gravitationskollaps können Dichten erreicht werden, die den Zustandsraum der Elektronen einschränken. Nach dem Pauli-Prinzip kann eine Elementarzelle h^3 des Phasenraums nur von einem Fermionzustand eingenommen werden. Wegen des statistische Gewichts $g_e = 2$ (2 Spinzustände) können sich also in einem Phasenraumelement bis zu zwei Elektronen aufhalten. Die Anzahl der Zustände bis zu dem Fermi-Impuls p_F ist deshalb:

$$N = g_e \frac{V}{h^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{g_e V}{3h^3} 4\pi p_F^3 \quad (6.41)$$

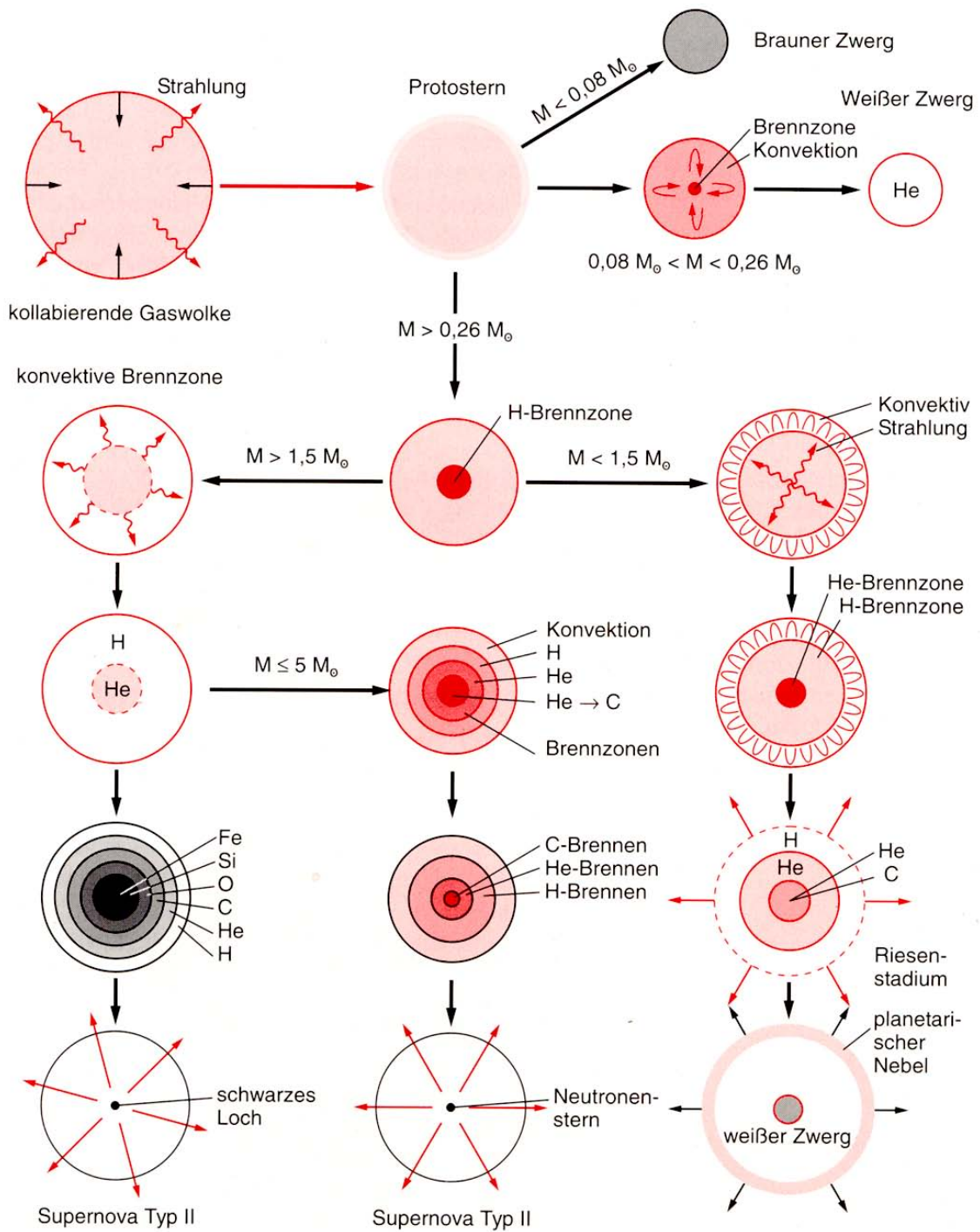


Abbildung 6.13: Entwicklungswege der Sterne in Abhängigkeit von ihrer Masse (aus [8]).

Für Elektronen ergibt sich

$$p_F = h \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3}, \quad (6.42)$$

wobei $n = N/V$ die Elektronendichte ist.

Um einen Ausdruck für den Druck, der sich bei Einschränkung des Phasenraums aufbaut, zu erhalten, benutzen wir die Zustandsgleichungen im Anhang B.1, die den Zusammenhang zwischen Druck und Massen-/Energiedichte angeben. Dabei wird hier der Unterschied der Zustandsgleichungen für relativistische Teilchen verglichen mit der für nicht-relativistischen Teilchen besonders wichtig. Für die beiden Grenzfälle $v \rightarrow c$ und $v \rightarrow 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{relativistisch (R):} & \quad P = \frac{1}{3} \rho_R \\ \text{nicht-relativistisch (NR):} & \quad P = \frac{1}{3} \rho_m v^2 = \frac{2}{3} \rho_{NR} \end{aligned}$$

Dabei ist ρ_m die Massendichte, ρ_{NR} die Dichte der kinetischen Energie und ρ_R die Dichte der Strahlungsenergie. Der Druck wird hier mit dem großen Buchstaben P angegeben, was nicht mit einem Impuls p verwechselt werden sollte.

Damit erhalten wir im nicht-relativistischen Fall für die Dichte:

$$\rho_{NR} = \frac{E_{NR}}{V} = \int_0^{p_F} 8\pi p^2 \frac{p^2}{2m_e} \frac{dp}{h^3} = \frac{8\pi p_F^5}{10m_e h^3} \quad (6.43)$$

und damit für den Druck:

$$P_{NR} = \frac{2}{3} \frac{E_{NR}}{V} = \frac{8\pi p_F^5}{15m_e h^3} = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{5m_e} \cdot n^{5/3} \quad (6.44)$$

Im relativistischen Fall ($E \approx pc$) ergibt sich entsprechend für die Dichte:

$$\rho_R = \frac{E_R}{V} \approx \frac{pc}{V} = \int_0^{p_F} 8\pi p^2 p c \frac{dp}{h^3} = \frac{2\pi p_F^4 c}{h^3} \quad (6.45)$$

und damit für den Druck:

$$P_R = \frac{1}{3} \frac{E_R}{V} = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} \frac{hc}{4} \cdot n^{4/3} \quad (6.46)$$

Der Entartungsdruck P_R oder P_{NR} ist mit dem Gravitationsdruck und dessen Abhängigkeit von der Elektronendichte n zu vergleichen:

$$\begin{aligned} P_{grav} &= \frac{1}{3} \frac{E_{grav}}{V} = \frac{1}{3} \frac{1}{V} \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = \frac{1}{5} \frac{GM^2}{\frac{4}{3}\pi R^4} \\ &= \frac{G}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} M^{2/3} \left(\frac{m_p A}{Z} \right)^{4/3} n^{4/3} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Dabei ist die Elektronendichte n aus der Massendichte ρ , der Gesamtmasse M und den Massen- und Ladungszahlen A , Z berechnet worden:

$$\rho = n \frac{A}{Z} m_p = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \implies R^4 = \left(\frac{M Z}{\frac{4}{3}\pi n A m_p} \right)^{4/3} \quad (6.48)$$

Als wichtiges Ergebnis halten wir fest: