

Anhang A

Astrophysikalische Konstanten

2. ASTROPHYSICAL CONSTANTS AND PARAMETERS

Table 2.1. Revised May 2008 by E. Bergren and D.E. Groom (LBNL). The figures in parentheses after some values give the one standard deviation uncertainties in the last digit(s). Physical constants are from Ref. 1. While every effort has been made to obtain the most accurate current values of the listed quantities, the table does not represent a critical review or adjustment of the constants, and is not intended as a primary reference. The values and uncertainties for the cosmological parameters depend on the exact data sets, priors, and basis parameters used in the fit. Many of the parameters reported in this table are derived parameters or have non-Gaussian likelihoods. The quoted errors may be highly correlated with those of other parameters, so care must be taken in propagating them. Unless otherwise specified, cosmological parameters are best fits of a spatially-flat Λ CDM cosmology with a power-law initial spectrum to WMAP 3-year data alone [2]. For more information see Ref. 3 and the original papers.

Quantity	Symbol, equation	Value	Reference, footnote
speed of light	c	$299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$	exact[4]
Newtonian gravitational constant	G_N	$6.674\,3(7) \times 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}$	[1]
Planck mass	$\sqrt{\hbar c/G_N}$	$1.220\,89(6) \times 10^{19}\text{ GeV}/c^2$ $= 2.176\,44(11) \times 10^{-8}\text{ kg}$	[1]
Planck length	$\sqrt{\hbar G_N/c^3}$	$1.616\,24(8) \times 10^{-35}\text{ m}$	[1]
standard gravitational acceleration	g_N	$9.806\,65\text{ m s}^{-2}$	exact[1]
jansky (flux density)	Jy	$10^{-26}\text{ W m}^{-2}\text{ Hz}^{-1}$	definition
tropical year (equinox to equinox) (2007)	yr	$31\,556\,925.2\text{ s} \approx \pi \times 10^7\text{ s}$	[5]
sidereal year (fixed star to fixed star) (2007)		$31\,558\,149.8\text{ s} \approx \pi \times 10^7\text{ s}$	[5]
mean sidereal day (2007) (time between vernal equinox transits)		$23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}}.090\,53$	[5]
astronomical unit	AU, A	$149\,597\,870\,700(3)\text{ m}$	[6]
parsec (1 AU/1 arc sec)	pc	$3.085\,677\,6 \times 10^{16}\text{ m} = 3.262\dots\text{ly}$	[7]
light year (deprecated unit)	ly	$0.306\,6\dots\text{pc} = 0.946\,053\dots \times 10^{16}\text{ m}$	
Schwarzschild radius of the Sun	$2G_N M_\odot/c^2$	$2.953\,250\,077\,0(2)\text{ km}$	[8]
Solar mass	M_\odot	$1.988\,4(2) \times 10^{30}\text{ kg}$	[9]
Solar equatorial radius	R_\odot	$6.9551(3) \times 10^8\text{ m}$	[10]
Solar luminosity	L_\odot	$3.842\,7(1\,4) \times 10^{26}\text{ W}$	[11]
Schwarzschild radius of the Earth	$2G_N M_\oplus/c^2$	$8.870\,055\,881\text{ mm}$	[12]
Earth mass	M_\oplus	$5.972\,2(6) \times 10^{24}\text{ kg}$	[13]
Earth mean equatorial radius	R_\oplus	$6.378\,137 \times 10^6\text{ m}$	[5]
luminosity conversion (deprecated)	L	$3.02 \times 10^{28} \times 10^{-0.4 M_{\text{bol}}}\text{ W}$ (M_{bol} = absolute bolometric magnitude = bolometric magnitude at 10 pc)	[14]
flux conversion (deprecated)	\mathcal{F}	$2.52 \times 10^{-8} \times 10^{-0.4 m_{\text{bol}}}\text{ W m}^{-2}$ (m_{bol} = apparent bolometric magnitude)	from above
ABsolute monochromatic magnitude	AB	$-2.5 \log_{10} f_\nu - 56.10$ (for f_ν in $\text{W m}^{-2}\text{ Hz}^{-1}$) $= -2.5 \log_{10} f_\nu + 8.90$ (for f_ν in Jy)	[15]
Solar velocity around center of Galaxy	Θ_0	$220(20)\text{ km s}^{-1}$	[16]
Solar distance from Galactic center	R_0	$8.0(5)\text{ kpc}$	[17]
local disk density	ρ_{disk}	$3\text{--}12 \times 10^{-24}\text{ g cm}^{-3} \approx 2\text{--}7\text{ GeV}/c^2\text{ cm}^{-3}$	[18]
local halo density	ρ_{halo}	$2\text{--}13 \times 10^{-25}\text{ g cm}^{-3} \approx 0.1\text{--}0.7\text{ GeV}/c^2\text{ cm}^{-3}$	[19]
present day CMB temperature	T_0	$2.725(1)\text{ K}$	[20]
present day CMB dipole amplitude		$3.358(17)\text{ mK}$	[21]
Solar velocity with respect to CMB		$369(2)\text{ km/s}$ towards $(\ell, b) = (263.86(4)^\circ, 48.24(10)^\circ)$	[21]
Local Group velocity with respect to CMB	v_{LG}	$627(22)\text{ km s}^{-1}$ towards $(\ell, b) = (276(3)^\circ, 30(3)^\circ)$	[22]
entropy density/Boltzmann constant	s/k	$2889.2 (T/2.725)^3\text{ cm}^{-3}$	[14]
number density of CMB photons	n_γ	$410.5(T/2.725)^3\text{ cm}^{-3}$	[23]
present day Hubble expansion rate	H_0	$100 h\text{ km s}^{-1}\text{ Mpc}^{-1}$ $= h \times (9.777\,752\text{ Gyr})^{-1}$	[24]
present day normalized Hubble expansion rate [‡]	h	$0.73(3)$	[2,3]
Hubble length	c/H_0	$0.925\,063 \times 10^{26} h^{-1}\text{ m} \approx 1.27 \times 10^{26}\text{ m}$	
scale factor for cosmological constant	$c^2/3H_0^2$	$2.852 \times 10^{51} h^{-2}\text{ m}^2$	
critical density of the Universe	$\rho_c = 3H_0^2/8\pi G_N$	$2.775\,366\,27 \times 10^{11} h^2 M_\odot\text{Mpc}^{-3}$ $= 1.878\,35(19) \times 10^{-29} h^2\text{ g cm}^{-3}$ $= 1.053\,68(11) \times 10^{-5} h^2 (\text{GeV}/c^2)\text{ cm}^{-3}$	
pressureless matter density of the Universe [‡]	$\Omega_m = \rho_m/\rho_c$	$0.128(8) h^{-2} \approx 0.24$ (WMAP3) $0.132(4) h^{-2} \Rightarrow 0.27(2)$ (ALL mean)	[2,3] [2]
baryon density of the Universe [‡]	$\Omega_b = \rho_b/\rho_c$	$0.0223(7) h^{-2} \approx 0.0425$	[2,3]
dark matter density of the universe [‡]	$\Omega_{\text{dm}} = \Omega_m - \Omega_b$	$0.105(8) h^{-2} \approx 0.20$	[2]
dark energy density of the Universe [‡]	Ω_Λ	$0.73(3)$	[25]
Hubble length	c/H_0	$0.925\,063 \times 10^{26} h^{-1}\text{ m} \approx 1.27 \times 10^{26}\text{ m}$	
radiation density of the Universe [‡]	$\Omega_\gamma = \rho_\gamma/\rho_c$	$2.471 \times 10^{-5} (T/2.725)^4 h^{-2} \approx 4.6 \times 10^{-5}$	[23]
neutrino density of the Universe [‡]	Ω_ν	$0.0005 < \Omega_\nu h^{-2} < 0.023 \Rightarrow 0.001 < \Omega_\nu < 0.05$	[26]
total energy density of the Universe [‡]	$\Omega_{\text{tot}} = \Omega_m + \dots + \Omega_\Lambda$	$1.011(12)$	[2,27]

Abbildung A.1: Astrophysikalische Konstanten (aus [17])

2 2. *Astrophysical constants*

Quantity	Symbol, equation	Value	Reference, footnote
baryon-to-photon ratio [‡]	$\eta = n_b/n_\gamma$	$6.12(19) \times 10^{-10}$	[28]
number density of baryons [‡]	n_b	$(1.9 \times 10^{-7} < n_b < 2.7 \times 10^{-7}) \text{ cm}^{-3}$ (95% CL)	from η
dark energy equation of state parameter [‡]	w	$-0.97(7)$	[2]
fluctuation amplitude at $8h^{-1}$ Mpc scale [‡]	σ_8	$0.76(5)$	[2,3]
scalar spectral index from power-law fit to data [‡]	n_s	$0.958(16)$	[2,3]
running spectral index slope at $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ [‡]	$dn_s/d \ln k$	-0.05 ± 0.03	[2,29]
tensor-to-scalar field perturbations ratio at $k_0 = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$ [‡]	$r = T/S$	< 0.65 at 95% C.L.	[2,3]
reionization optical depth [‡]	τ	$0.09(3)$	[2,3]
age of Universe at reionization [‡]	t_{reion}	365 Myr	[2,3]
age of the Universe [‡]	t_0	$13.73(15) \text{ Gyr}$	[2]

[‡] See caption for caveats.

References:

- P. J. Mohr, B. N. Taylor, & D. B. Newell, *CODATA Recommended Values of the Fundamental Constants: 2006*, Rev. Mod. Phys. (to be published); physics.nist.gov/constants.
- D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Supp.* **170**, 377 (2007). Post-deadline WMAP5 values have not been used. In any case, they usually vary no more than 1σ from the WMAP3 values.
- O. Lahav & A. R. Liddle, "The Cosmological Parameters," this *Review*.
- B. W. Petley, *Nature* **303**, 373 (1983).
- The Astronomical Almanac for the year 2007*, U.S. Government Printing Office, Washington, and The Stationery Office, London (2005).
- With the range measurements of the Mars Global Surveyor and Odyssey in 1999–2007 now added to the Viking ranges of 1976–82, the value of the AU is determined to be $149\,597\,870\,700 \pm 2$ meters. While the AU is approximately equal to the semi-major axis of the Earth's orbit, it is not exactly so. Nor is it exactly the mean earth-sun distance. There are a number of reasons for this: 1) the Earth's orbit is not exactly Keplerian due to relativity and to perturbations from other planets; 2) the adopted value for the Gaussian gravitational constant k is not exactly equal to the earth's mean motion; and 3) the mean distance in a Keplerian orbit is not equal to the semi-major axis; instead, it is $\langle r \rangle = a(1 + e^2/2)$, where e is the eccentricity. For an observer far above Earth's orbital plane at rest in the inertial frame of the Solar System, terrestrial clocks would appear to run slower than local clocks because of (a) time dilation from Earth's orbital motion and (b) gravitational redshift at the Earth's surface and in the Sun's potential well. The last contribution is twice as big as the time dilation. The clock rates differ by 1.5 parts in 10^8 . These effects complicate the measurement and definition of the AU and $G_N M_\odot$ (Discussion courtesy of Myles Standish, JPL).
- The distance at which 1 AU subtends 1 arc sec: 1 AU divided by $\pi/648\,000$.
- Product of $2/c^2$ and the heliocentric gravitational constant $G_N M_\odot = A^3 k^2 / 86400^2$, where k is the Gaussian gravitational constant, $0.017\,202\,098\,95$ (exact) [5]. The value and error for A given in this table are used.
- Obtained from the heliocentric gravitational constant [5] and G_N [1]. The error is the 100 ppm standard deviation of G_N .
- T. M. Brown & J. Christensen-Dalsgaard, *Astrophys. J.* **500**, L195 (1998). Many values for the Solar radius have been published, most of which are consistent with this result.
- $4\pi A^2 \times (1366.4 \pm 0.5) \text{ W m}^{-2}$ [30]. Assumes isotropic irradiance.
- Schwarzschild radius of the Sun (above) scaled by the Earth/Sun mass ratio given in Ref. 5.
- Obtained from the geocentric gravitational constant [5] and G_N [1]. The error is the 100 ppm standard deviation of G_N .
- E. W. Kolb & M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley (1990); The IAU (Commission 36) has recommended $3.055 \times 10^{28} \text{ W}$ for the zero point. Based on newer Solar measurements, the value and significance given in the table seems more appropriate.
- J. B. Oke & J. E. Gunn, *Astrophys. J.* **266**, 713 (1983). Note that in the definition of AB the sign of the constant is wrong.
- F. J. Kerr & D. Lynden-Bell, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **221**, 1023–1038 (1985). "On the basis of this review these [$R_0 = 8.5 \pm 1.1 \text{ kpc}$ and $\Theta_0 = 220 \pm 20 \text{ km s}^{-1}$] were adopted by resolution of IAU Commission 33 on 1985 November 21 at Delhi." We retain this value for Θ_0 but list a more modern value for R_0 .
- M. J. Reid, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **31**, 345–372 (1993); M. Shen & Z. Zhu, *Chin. Astron. Astrophys.* **7**, 120 (2007). In Fig. 2 they present a summary of a dozen modern values for R_0 . All but one are within Reid's error band.
- G. Gilmore, R. F. G. Wyse, & K. Kuijken, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **27**, 555 (1989).
- E. I. Gates, G. Gyuk, & M. S. Turner (*Astrophys. J.* **449**, L133 (1995)) find the local halo density to be $9.2^{+3.8}_{-3.1} \times 10^{-25} \text{ g cm}^{-3}$, but also comment that previously published estimates are in the range $1\text{--}10 \times 10^{-25} \text{ g cm}^{-3}$. The value $0.3 \text{ GeV}/c^2$ has been taken as "standard" in several papers setting limits on WIMP mass limits, *e.g.* in M. Mori *et al.*, *Phys. Lett.* **B289**, 463 (1992).
- J. Mather *et al.*, *Astrophys. J.* **512**, 511 (1999). This paper gives $T_0 = (2.725 \pm 0.002) \text{ K}$ at 95%CL. We take 0.001 as the one-standard deviation uncertainty.
- G. Hinshaw, *et al.*, *Astrophys. J. Supp.* **170**, 288 (2007).
- D. Scott & G. F. Smoot, "Cosmic Microwave Background," this *Review*.
- $n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{kT}{hc}\right)^3$ and $\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} \left(\frac{kT}{hc}\right)^4$.
- Conversion using length of sidereal year.
- Ω_Λ from fits to various data sets is given in Table 12 in Ref. 2. The (meaningless) weighted average from the not-independent data sets is 0.727 ± 0.012 . This is almost the WMAP + SDSS LRG fit, which we quote with a 50% more conservative error. The extended error band includes results obtained with all of the data sets.
- The lower limit follows from neutrino mixing results combined with the assumptions that there are three light neutrinos ($m < 45 \text{ GeV}$) and that the lightest neutrino is substantially less massive than the others. Limits set from analyses of WMAP, large-scale structure, and other data are in the $\Omega_\nu < 0.02$ range. If the limit obtained from tritium decay experiments ($m_\nu < 2 \text{ eV}$) is taken seriously, then one can only conclude that $\Omega_\nu < 0.1$.
- From WMAP 3-year + SNLS data. WMAP 3-year data plus the HST Key Project constraint on H_0 implies $\Omega_{\text{tot}} = 1.014 \pm 0.017$ [2].
- Calculated from ρ_c , Ω_b , and n_γ .
- From WMAP 3-year data alone, assuming no tensors. If other data are included, results from -0.058 to -0.066 are obtained. Inclusion of tensors in the model results in values from -0.082 to -0.090 [2].
- R. C. Willson & A. V. Mordvinov, *Geophys. Res. Lett.* **30**, 1119 (2003); C. Frölich, *Space Sci. Rev.* **125**, 53–65 (2006).

Abbildung A.2: Astrophysikalische Konstanten (aus [17])

Anhang B

Ergänzungen

B.1 Zustandsgleichungen

Im Folgenden soll der Zusammenhang zwischen Druck und Energiedichte für Materie und Strahlung für einige wichtige Spezialfälle näher betrachtet werden. Bei der Ableitung der allgemeinen Gasgleichung benutzt man:

$$p = \frac{1}{3} n \langle \pi v \rangle \quad (\text{B.1})$$

Dabei ist p der Druck, der von Teilchen mit einer Dichte n , mittlerem Impuls π und Geschwindigkeit v auf die Wand eines Gefäßes ausgeübt wird.

Im **nicht-relativistischen Fall**, $v \ll c$, ist $\pi = m v$ (m bedeutet immer die Ruhemasse) und (B.1) wird:

$$p = \frac{1}{3} n m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} n m c^2 \left\langle \frac{v^2}{c^2} \right\rangle = \frac{1}{3} \rho_m c^2 \left\langle \frac{v^2}{c^2} \right\rangle, \quad (\text{B.2})$$

wobei $\rho_m c^2$ die Energiedichte aufgrund der Ruhemassen ist, die im nicht-relativistischen Fall dominiert. In diesem Fall wird der Druck auch sehr klein:

$$p \rightarrow 0 \quad \text{für } v \ll c. \quad (\text{B.3})$$

Im **relativistischen Fall**, $v \approx c$, geht man von den relativistischen Formeln für Impuls und Energie aus:

$$\pi = \gamma m v \quad \text{und} \quad E = \gamma m c^2 \quad (\text{B.4})$$

Tabelle B.1: Zustandsgleichung, Energiedichte und Skalenparameter, der die Ausdehnung des Universums beschreibt, jeweils für die Dominanz einer Energieform in einer Entwicklungsphase des Universums.

Dominante Energieform	Zustandsgleichung	Energiedichte	Skalenparameter
Strahlung	$p = \frac{1}{3} \rho_s$	$\rho_s \sim R^{-4}$	$R \sim t^{1/2}$
Materie	$p = \frac{1}{3} \rho_m c^2 \langle \frac{v^2}{c^2} \rangle \xrightarrow{v \ll c} 0$	$\rho_m \sim R^{-3}$	$R \sim t^{2/3}$
Vakuum	$p = -\rho_v$	$\rho_v = \text{const}$	$R \sim \exp(\alpha t)$

Damit ergibt sich:

$$\lim_{v \rightarrow c} \pi \rightarrow E/c \quad (\text{B.5})$$

Diese Gleichung entspricht natürlich dem Zusammenhang zwischen Energie und Impuls eines Photons:

$$\pi = \frac{h}{\lambda}; \quad E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \pi c \quad (\text{B.6})$$

Damit ergibt (B.1) im relativistischen Fall, $v \approx c$:

$$p = \frac{1}{3}n \langle \pi c \rangle = \frac{1}{3}n \langle E \rangle = \frac{1}{3}\rho_s \quad (\text{B.7})$$

Quantenfluktuationen im Vakuum führen zu einer **Vakuumenergie** ρ_v , die negativen Druck ausübt:

$$p = -\rho_v c^2 \quad (\text{B.8})$$

Der negative Druck lässt sich dadurch erklären, dass die Energie proportional dem Volumen zunimmt, weil mit wachsendem Phasenraum mehr Schwingungsmoden möglich werden (entspricht dem Casimir-Effekt).

In Tabelle B.1 ist zusammengestellt, wie sich das Universum jeweils entwickelt, wenn ein bestimmter Zustand dominiert. Im allgemeinen ist die Energiedichte eine Summe aus den Beiträgen von Strahlung, Materie und Vakuumenergie. Die normierte Energiedichte ist dann:

$$\Omega_{tot} = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{\rho_s}{\rho_c} + \frac{\rho_m}{\rho_c} + \frac{\rho_v}{\rho_c} = \Omega_s + \Omega_m + \Omega_v \quad (\text{B.9})$$

B.2 ‘Relativistic Beaming’

Im Folgenden soll die Relation zwischen einer beobachteten Intensität einer Photonquelle oberhalb einer Schwellenenergie E ,

$$I(E_\gamma > E) = \int_E^\infty \frac{d^2 N_\gamma}{dt dE_\gamma} E_\gamma dE_\gamma \quad (\text{B.10})$$

und der entsprechenden Intensität im Ruhesystem der Quelle hergeleitet werden. Wir betrachten dazu eine relativistischen Jet, der sich mit der Geschwindigkeit v unter einem Winkel θ zur Sichtlinie bewegt (Abb. B.1).

Der mittlere Abstand, in dem Photonen von der Quelle emittiert werden, sei $d\tilde{t}$ im Ruhesystem der Quelle. Wenn sich die Quelle nicht bewegt, ist die Zeit im Beobachtersystem die gleiche: $dt = d\tilde{t}$, mit Bewegung: $dt = \gamma d\tilde{t}$. Im Beobachtersystem hat die Quelle in der Zeit dt die Strecke $v dt$ zurückgelegt und soll die Ebene in $A - B$ in der Abbildung erreichen. Um diese Ebene, von der aus die Lichtwege zum Beobachter gleich sind, zu erreichen, braucht das erste Photon eine Zeit $v \cos \theta dt/c$, so dass für die beobachtete Zeit zwischen der Ankunft von zwei Photonen gilt:

$$dt \rightarrow (1 - \beta \cos \theta) dt \quad (\text{B.11})$$

Damit gilt für die Relation zum Zeitintervall $d\tilde{t}$ zwischen zwei Emissionen in der Quelle:

$$dt \rightarrow \gamma(1 - \beta \cos \theta) d\tilde{t} = \frac{1}{\delta} d\tilde{t}, \quad (\text{B.12})$$

Die zeitliche Änderung dieser Größe ist:

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \vec{r}_i + \sum_i \vec{p}_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i + 2T, \quad (\text{B.20})$$

wobei \vec{F}_i die Kraft auf den Massenpunkt i ist und T die gesamte kinetische Energie des Systems.

Im zeitlichen Mittel ist G konstant:

$$\overline{\frac{dG}{dt}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{dG}{d\tau} d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} [G(t) - G(0)] = 0. \quad (\text{B.21})$$

Der Ausdruck wird Null, weil $G(t)$ für alle t wegen der angenommenen Beschränktheit der Vektoren \vec{r}_i und \vec{p}_i endlich bleibt. Damit ergibt sich aus (B.20) der **Virialsatz** in allgemeiner Form:

$$\overline{\sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i} = 2\overline{T}. \quad (\text{B.22})$$

Im Folgenden wollen wir den Fall konservativer Kräfte der Massenpunkte untereinander, die nach einem Potenzgesetz von den Abständen abhängen sollen, betrachten. Die Kraft auf einen Massenpunkt i setzt sich aus den Kräften \vec{F}_{ij} aller anderen Massenpunkte j auf den Punkt i zusammen:

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad (\text{B.23})$$

Da $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ gilt, läßt sich schreiben:

$$\sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i = \sum_i \sum_{j < i} \vec{F}_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (\text{B.24})$$

Für die Kraftfelder, die sich aus einem Potential W_{ij} ableiten lassen, gelte ein Potenzgesetz:

$$\vec{F}_{ij} = a_{ij} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{n+1}} = \nabla W_{ij} \quad (\text{B.25})$$

Für Coulomb- und Gravitationsfelder gilt $n = 2$, während zum Beispiel für den harmonischen Oszillator $n = -2$ gilt. Aus der Integration der Kraft \vec{F}_{ij} in (B.25) über den Abstand zwischen i und j ergibt sich der Beitrag zur potenziellen Energie

$$W_{ij} = -\frac{1}{n-1} \frac{a_{ij}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{n-1}} = -\frac{1}{n-1} \vec{F}_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j). \quad (\text{B.26})$$

und der Ausdruck in (B.24) ist dann mit der gesamten potentiellen Energie wie folgt verknüpft:

$$\sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i = -(n-1)W_{pot} \quad (\text{B.27})$$

Setzt man dieses Ergebnis in den allgemeinen Ausdruck für den Virialsatz in (B.22) ein, ergibt sich der Virialsatz für Potenzgesetz-Kraftfelder:

$$\overline{T} = -\frac{n-1}{2} \overline{W_{pot}}, \quad (\text{B.28})$$

und damit für die hier wichtigen Gravitationskräfte mit $n = 2$:

$$\bar{T} = -\frac{1}{2}\overline{W_{pot}}. \quad (\text{B.29})$$

Wenn sich die Massenpunkte in einem mechanischen Gleichgewicht befinden, kann die Mittelwertbildung wegfallen:

$$T = -\frac{1}{2}W_{pot}. \quad (\text{B.30})$$

Aus (B.28) ergibt sich die Gesamtenergie des Systems:

$$E = T + W_{pot} = T - \frac{2}{n-1}T = \frac{n-3}{n-1}T \quad (\text{B.31})$$

Daraus folgt, dass es für $n \geq 3$ und $n \leq 1$ keine gebundenen Systeme mit $E < 0$ gibt.