

# Kapitel 2

## Die Entwicklung des Universums

### 2.1 Einführung

Die Frage nach dem Ursprung und der Entwicklung des Universums ist eng verknüpft mit den Fragen nach der Struktur der Materie und deren Verhalten unter extremen Bedingungen. Viele experimentelle Ergebnisse deuten darauf hin, dass sich das Universum in einem Urknall ('Big Bang') aus einem extrem heißen Feuerball entwickelt hat. Mit dem Urknall begann das Universum zu expandieren und durchlief dabei unterschiedliche Entwicklungsphasen beginnend bei höchsten Energien und Dichten.

Um die gegenwärtige Entwicklung des Universums zu beschreiben, spielt nur die Gravitation als Wechselwirkung eine Rolle, weil alle anderen Wechselwirkungen durch entgegengesetzte Ladungen auf makroskopischen Abständen neutralisiert sind. Das war in den ersten Sekunden nach dem Urknall anders: Das frühe Universum hat Phasen durchlaufen, in denen die Energien der Teilchen in dem Feuerball auftraten, die weit jenseits der uns mit Beschleunigern jemals zugänglichen Energien lagen. Durch das Verständnis der ersten Sekunden nach dem Urknall erhofft man sich Aufschluß über Fragen, die jenseits des Standardmodells der Teilchenphysik liegen, wie die 'Große Vereinheitlichung' (GUT), die Physik auf der Planck-Skala und, damit verbunden, die Vereinheitlichung der Gravitation mit den anderen Wechselwirkungen (Abb. 2.1 und Abb. 2.2).

Es gibt zu diesem Thema viel populärwissenschaftliche Literatur (u.a. S. Weinberg: 'Die ersten drei Minuten' [12], H. Fritzsch: 'Vom Urknall zum Zerfall' [13]). In der empfohlenen Literatur finden sich Beiträge zu diesem Thema insbesondere bei Coles und Lucchin [11], Demtröder [8] und Klapdor-Kleingrothaus, Zuber [9].

### 2.2 Das Urknall-Modell

Noch Einstein hatte bei der Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie, der heute gängigen Theorie der Gravitation, angenommen, dass sich das Universum in einem statischen Zustand befindet. Mit der Entdeckung durch Hubble 1929, dass sich das Universum ausdehnt, hat sich das Urknall-Modell zum Standardmodell der Kosmologie entwickelt. Die wesentlichen experimentellen Stützpfiler für dieses Modell sind:

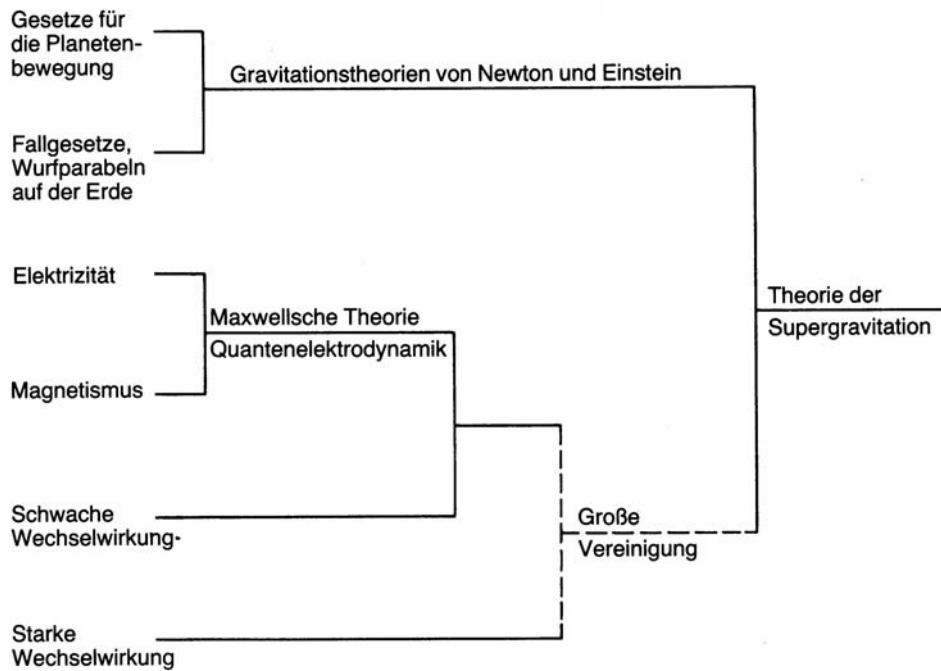


Abbildung 2.1: Die Vereinheitlichung der Wechselwirkungen: den Schritt zur Großen Vereinigung der starken und elektro-schwachen Wechselwirkung und schließlich deren Vereinigung mit der Gravitation hofft man aus einer Analyse der Entwicklung des frühen Universums bei sehr kleinen Abständen und hohen Energien zu verstehen.

- Die über die Rotverschiebung von Spektrallinien gemessenen Fluchtbewegungen von Galaxien, aus der Hubble die Expansion des Weltalls schloß.
- Die kosmische Hintergrundstrahlung ('3K-Strahlung'), die als die vom Urknall übriggebliebene und durch die Expansion abgekühlte Strahlung vorhergesagt (Gamov 1948) und auch entdeckt wurde (Penzias und Wilson, 1964).
- Die gemessene Häufigkeit der in den ersten vier Minuten nach dem Urknall erzeugten leichten Elemente stimmt über 10 Größenordnungen mit den Berechnungen nach dem Urknallmodell überein.

### 2.2.1 Die Metrik des gekrümmten Raums

Nach Einstein wird die Gravitation durch die Geometrie des Raumes beschrieben: die Massenverteilung im Universum erzeugt eine Krümmung des Raumes, der 'fallende' Körper auf Geodäten folgen. Unsere Beobachtungen zeigen, dass das Universum auf genügend großen Skalen homogen und isotrop ist, wie man am Beispiel der Verteilung von Galaxien (Abb. 2.3) oder der gemessenen Isotropie der 3K-Hintergrundstrahlung sieht. Aus der Homogenität und Isotropie folgt das **Kosmologische Prinzip**: für alle Beobachter, unabhängig von Ort und Beobachtungsrichtung, soll das Universum gleich aussehen. In diesem Fall muß der dreidimensionale Raum eine konstante Krümmung haben.

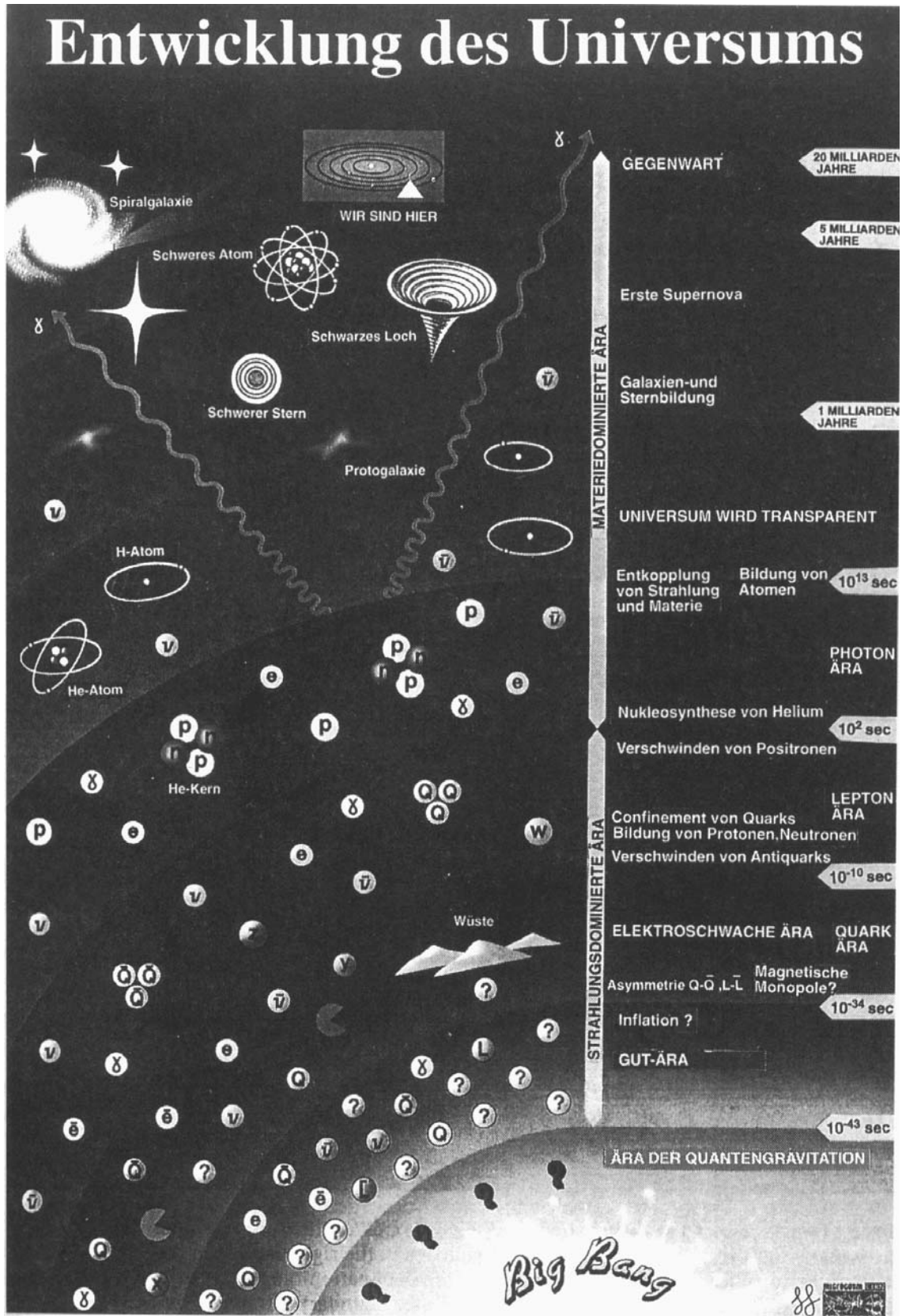


Abbildung 2.2: Die Entwicklung des Universums.

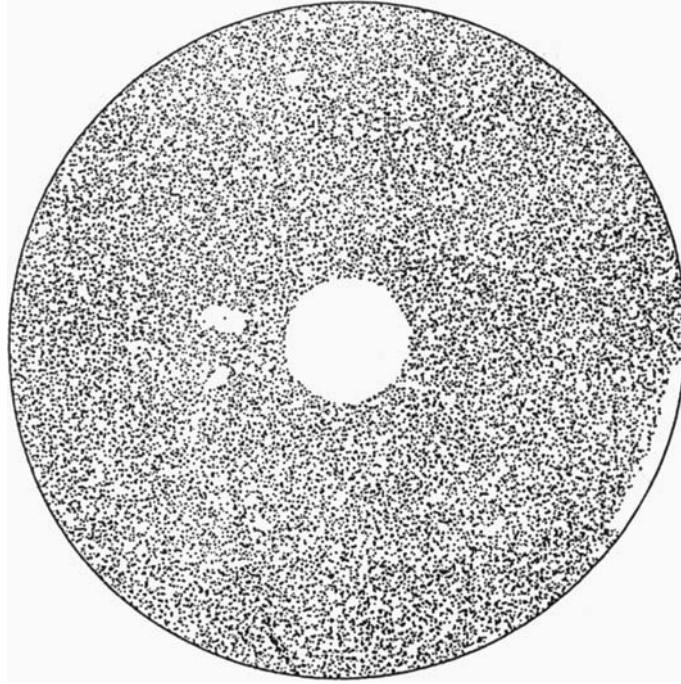


Abbildung 2.3: Die Verteilung von Radioquellen aufgenommen in einer Durchmusterung bei 6 cm Wellenlänge. In der Mitte ist der galaktische Nordpol, am Rand der galaktische Äquator.

**Robertson-Walker-Metrik:** Ein dreidimensionaler Raum positiver, konstanter Krümmung kann als Oberfläche einer Kugel in einem vierdimensionalen Raum aufgefasst werden:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2 = \text{konstant}, \quad (2.1)$$

analog der zweidimensionalen Oberfläche einer Kugel. Diese Analogie kann durchaus für ein anschauliches Verständnis des gekrümmten Raumes herangezogen werden, zum Beispiel: Wie die zweidimensionale Oberfläche einer Kugel im dreidimensionalen Raum keine Begrenzung, aber trotzdem eine endliche Fläche hat, so hat auch der durch (2.1) dargestellte dreidimensionale Raum keine Begrenzung, aber ein endliches Volumen. Der vierdimensionale Raum, in den wir die dreidimensionale Kugel eingebettet haben, hat keine reale Bedeutung, sondern wird hier nur als Konstruktionshilfe benutzt.

Den Kugelkoordinaten entsprechen im vierdimensionalen Raum drei Winkel und ein Radius:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (r, \psi, \theta, \varphi) \quad (2.2)$$

mit  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \psi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Punkte auf der Kugel haben die Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sin \psi \sin \theta \cos \varphi, \\ x_2 &= R \sin \psi \sin \theta \sin \varphi, \\ x_3 &= R \sin \psi \cos \theta, \\ x_4 &= R \cos \psi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Das Linienelement auf der dreidimensionalen ‘Kugeloberfläche’ ist:

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = d\ell_\psi^2 + d\ell_\theta^2 + d\ell_\varphi^2 \\ &= R^2 [d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Man kann nun eine Entfernung  $r$  wie folgt einführen:

$$r = R \sin \psi. \quad (2.5)$$

Die Fläche  $r = \text{const}$  beschreibt eine zweidimensionale Kugeloberfläche in einem dreidimensionalen Raum mit der gewohnten Oberfläche  $4\pi r^2$ . Aus (2.5) ergibt sich:

$$dr = R \cos \psi d\psi = R \sqrt{1 - \sin^2 \psi} d\psi = R \sqrt{1 - (r/R)^2} d\psi \quad (2.6)$$

Damit läßt sich die Koordinate  $\psi$  in dem Linienelement (2.4) eliminieren und man erhält:

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.7)$$

Der zweite Term in der letzten Zeile ist das Linienelement auf der zweidimensionalen Oberfläche einer dreidimensionalen Kugel. Wir können dieses räumliche Linienelement mit dem Faktor  $R^2$  reskalieren und eine Krümmung  $k \sim 1/R^2$  einführen, die auf die Werte  $0, \pm 1$  eingeschränkt ist:

$$d\ell^2 = R^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right) \quad (2.8)$$

Dann ist  $R$  der physikalische Radius,  $r$  der Koordinatenradius und der Raum hat die Krümmung  $k/R^2$ . Damit wurde die gesamte Dynamik der Expansion des Weltalls in die Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors  $R = R(t)$  gesteckt. Für  $R \rightarrow 0$ , das heißt, wenn wir uns in Richtung Urknall bewegen, werden alle Abstände klein,  $d\ell \rightarrow 0$ , und das Volumen des Universums skaliert mit  $R^3$ :

$$V = 2\pi^2 R^3 \quad (2.9)$$

Andererseits bleiben alle Strukturen, in Abständen  $r$  gemessen, gleich; das Universum skaliert nur.

Das vollständige Robertson-Walker-Linienelement legt die Raum-Zeit-Vermessung des Kosmos fest:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right) \quad (2.10)$$

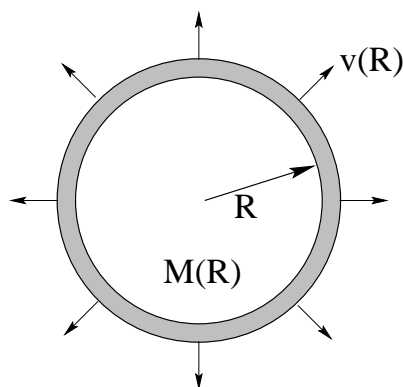
Die Koordinaten beziehen sich auf ein mitbewegtes Koordinatensystem, es wird kein Koordinatensystem bevorzugt.

Die Weltlinie eines Photons ist durch  $ds^2 = 0$  gegeben:

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \frac{d\ell}{dt} = c \quad (2.11)$$

Tabelle 2.1: Mögliche Raumkrümmung und Expansionsverhalten des Universums (ohne Berücksichtigung der “kosmologischen Konstanten”).

Typ	Geometrie	Krümmung	$\Omega = \rho/\rho_c$	Universum
$k = +1$	sphärisch	positiv	$> 1$	geschlossen
$k = 0$	euklidisch	keine (eben)	$= 1$	flach
$k = -1$	hyperbolisch	negativ	$< 1$	offen

Abbildung 2.4: Zur Bestimmung der Gesamtenergie  $E = E_{kin} + E_{pot}$  einer expandierenden Kugelschale.

## Expansion des Universums

Der Parameter  $k$  charakterisiert die Geometrie der Räume konstanter Krümmung (Tabelle 2.1) und die Krümmung bestimmt das Expansionsverhalten: für  $k = +1$  wird die Expansion mit der Zeit geringer und das Universum fällt wieder in sich zusammen, für  $k = -1$  expandiert das Universum ewig.

Wie sich unser Universum entwickeln wird, hängt von der Massen- oder Energiedichte ab<sup>1</sup>. In Abb. 2.4 ist ein kugelförmiger Ausschnitt aus dem Universum gezeigt, der homogen mit mittlerer Dichte  $\rho$  von Galaxien ausgefüllt ist. Der Radius der Kugel skaliert mit dem Skalenfaktor  $R$ , wie beim Aufblasen eines Luftballons. Deshalb ist in Abb. 2.4 ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Radius auf  $R$  gesetzt. Ein Beobachter im Zentrum der Kugel sieht, dass sich alle Galaxien mit einer Fluchtgeschwindigkeit  $v$  wegbewegen. Die Galaxien in der Kugelschale mit Radius  $R$  haben

<sup>1</sup>Zu der Anwendbarkeit der hier benutzten Argumente der Newton’schen Mechanik wird auf Seite 22 eingegangen.

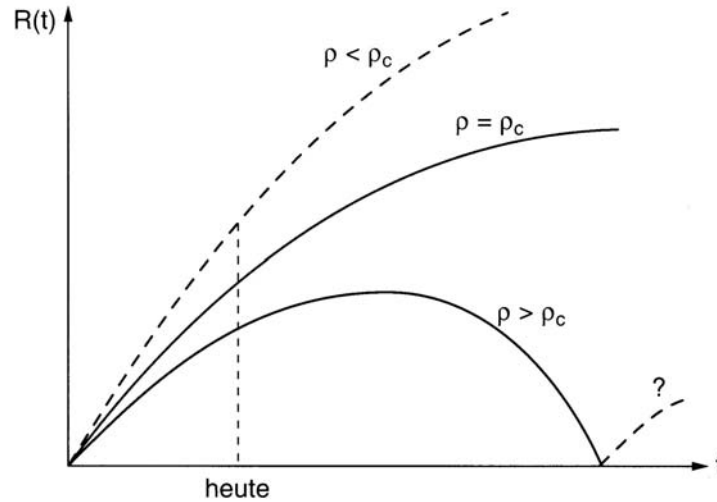


Abbildung 2.5: Zeitabhängigkeit des Skalenparameters  $R(t)$  für verschiedene Dichten relativ zur kritischen Dichte.

die Masse  $m = 4\pi R^2 dR \rho$  und bewegen sich mit der Geschwindigkeit

$$\dot{R} = v(R) = H \cdot R. \quad (2.12)$$

Diese Abhängigkeit der Fluchtgeschwindigkeit vom Radius wurde von Hubble gefunden ( $H =$  Hubble-Konstante). Damit ist die Gesamtenergie der Galaxien in der Kugelschale:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mH^2R^2 - G\frac{mM(R)}{R} \quad (2.13)$$

Dabei ist  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2} = 6.71 \cdot 10^{-39} \hbar c(\text{GeV}/c^2)^{-2}$  die Gravitationskonstante und

$$M(R) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad (2.14)$$

die Masse innerhalb der Kugel. Damit erhält man für die Energie:

$$E = \frac{1}{2}mR^2 \left( H^2 - \frac{8\pi G \rho}{3} \right) = \text{const} \quad (2.15)$$

Für  $E > 0$  überwiegt die kinetische Energie und das Universum wird sich immer ausdehnen; für  $E < 0$  wird es irgendwann aufgrund der Gravitation kollabieren. Der Umkehrpunkt bei  $E = 0$  entspricht einer kritischen Dichte  $\rho_c$ . Aus (2.15) erhält man:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.16)$$

Im allgemeinen ist für ein expandierendes Universum die Dichte und damit auch die Hubble-Konstante zeitabhängig (deshalb besser: Hubble-Parameter). Der klassi-

schen Gleichung (2.15) entspricht in der Allgemeinen Relativitätstheorie die Friedmann-Gleichung (für eine homogene, isotrope ideale Flüssigkeit):

$$H(t)^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - k \frac{c^2}{R^2} \quad (2.17)$$

Der Gesamtenergie in (2.15) entspricht der Krümmungsterm  $\sim 1/R^2$  mit dem Vorzeichenfaktor  $k$ , den wir weiter unten genauer betrachten. Die verschiedenen Lösungen für  $R(t)$  hängen von der Dichte relativ zur kritischen Dichte,

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.18)$$

ab. Die Verhältnisse sind in Abb. 2.5 dargestellt.

**Dichte des Universums:** Wenn man in (2.17)  $\rho = \Omega \cdot \rho_c$  einsetzt, ergibt sich:

$$H^2(\Omega - 1) = k \frac{c^2}{R^2}, \quad (2.19)$$

das heißt, das Vorzeichen von  $k$  ist durch  $\Omega \gtrless 1$  gegeben. In Tabelle 2.1 sind die drei Szenarien für die Entwicklung des Universums aufgelistet (zunächst hier ohne Berücksichtigung der ‘kosmologischen Konstante’, siehe Seite 22):

- $k = +1$ : Das Universum ist ‘geschlossen’, das heißt die Massendichte  $\rho$  ist so groß, dass die Gravitation die Expansion abbremst und das Universum wieder kollabiert. Das könnte zyklisch verlaufen wie in Abb. 2.5 für  $\rho > \rho_c$  angedeutet.
- $k = +0$ : Das Universum ist ‘flach’, die Metrik ist euklidisch. Die Expansionsgeschwindigkeit nimmt ab, es gibt aber keine Umkehr der Bewegung ( $E = 0$ ).
- $k = -1$ : Das Universum ist ‘offen’, es expandiert unendlich.

Die Frage, welches der Szenarien für unser Universum zutrifft, ist bis heute nicht beantwortet. Der heutige Wert von  $\Omega$  läßt sich durch Messung der Hubble-Konstante, die nach (2.16) die kritische Dichte festlegt, und der Massendichte im Weltall bestimmen. Der heutige Wert des Hubble-Parameters  $H_0$  ist [14]:

$$H_0 = 100 \cdot h_0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad \text{mit } h_0 = 0.73_{-0.03}^{+0.04} \quad (2.20)$$

Die Unsicherheit in dem normierten Hubble-Parameter  $h_0$  hat sich in den letzten Jahren enorm verringert. Vor etwa 10 Jahren war der Hubble-Parameter noch nicht einmal auf einen Faktor 2 genau bekannt.

Hier wurde die in der Astronomie gebräuchliche Einheit 1 Parsec = 1pc = 3.262 Lichtjahre benutzt. Es folgt die kritische Dichte:

$$\rho_c = 18.8 \cdot h_0^2 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \approx 11 h_0^2 \text{ Protonen/m}^3 \quad (2.21)$$

Problematisch gestaltet sich die Bestimmung der heutigen Dichte  $\rho$ . Aus verschiedenen Beobachtungsmethoden ergeben sich teilweise widersprechende Werte für den Parameter  $\Omega = \rho/\rho_c$ :



Beobachtung	$\Omega_0$	$\Delta\Omega_0$
sichtbare Materie in Sternen und Galaxien	$< 0.01$	0.003 - 0.007
Dynamik von Galaxien (Anwendung des Virialsatzes):		
- Galaxien	0.06	0.02 - 0.10
- Doppelgalaxien	0.10	0.03 - 0.15
- Galaxienhaufen	0.25	0.15 - 0.35
Häufigkeit der primordialen Elemente	0.1	0.009 - 0.14
Dichte der Galaxien in großer Entfernung	0.9	0.4 - 1.6

Diese grob unterschiedlichen Ergebnisse scheinen auf ein grundsätzliches Problem hinzuweisen. Der Unterschied zwischen der sichtbaren und der aus der Galaxiendynamik bestimmten Materie hat zu der Hypothese geführt, dass es ‘dunkle Materie’ gibt, die nicht oder nur sehr schwach mit der übrigen Materie wechselwirkt. Dabei ist zu beachten, dass die ‘sichtbare Materie’ oder ‘baryonische Materie’ sowohl die leuchtende als auch die aus Absorptionsmessungen bestimmte nichtleuchtende Materie einbezieht. Wir glauben heute, dass die Dunkle Materie den größten Anteil an der gesamten Masse im All ausmacht. Wir kommen später noch einmal auf das Problem der Dunklen Materie zurück.

**Lösungen für  $R(t)$ :** Um die Friedmann-Gleichung (2.17) lösen zu können, benötigt man einen Ansatz für die zeitliche Entwicklung der Energiedichte  $\rho$ . Die Materie und Strahlung im Universum müssen thermodynamische Zustandsgleichungen erfüllen. Die Energiebilanz fordert, dass die Energieänderung in einem mitgeführten Volumenelement gleich dem negativen Produkt aus Volumenänderung und Druck ist:

$$d(\rho R^3) c^2 = -p d(R^3) \implies d\rho = -\frac{3}{R} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) \quad (2.22)$$

Für die Zustandsgleichung  $p = p(\rho)$  kann man zwei Grenzfälle betrachten (siehe Anhang B.1):

- **Strahlungsdominierte Phase:** Kurz nach dem Urknall war das Universum dicht und heiß und die Teilchenenergien sehr groß gegenüber den Massen. Die Zustandsgleichung für ein solches relativistisches Gas ist:

$$p = \frac{1}{3} \rho c^2 \stackrel{(2.22)}{\implies} \rho \sim R^{-4} \quad (2.23)$$

- **Materiedominierte Phase:** Das ist die Phase, in der wir uns zur Zeit befinden: die kalte, geklumpfte Materie übt keinen Druck aus. Die Zustandsgleichung ist dann annähernd:

$$p = 0 \stackrel{(2.22)}{\implies} \rho \sim R^{-3} \quad (2.24)$$

Die letzte Gleichung drückt einfach die Erhaltung der Energie in Form von Masse aus. Im Falle der Strahlungsdominanz kommt in (2.23) ein zusätzlicher Faktor  $1/R$  deshalb hinzu, weil die Quanten eine Rotverschiebung proportional  $R$  erfahren, was die Energiedichte zusätzlich herabsenkt.

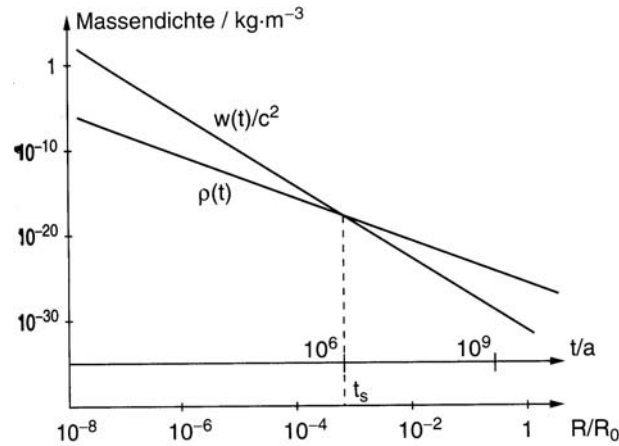


Abbildung 2.6: Massen- und Strahlungsdichte als Funktion der Zeit beziehungsweise des Skalenfaktors des expandierenden Universums.

Für ein flaches Universum ( $k = 0$ ) bekommt man dann in den beiden Fällen als Lösung der Friedmann-Gleichung (2.17):

$$\begin{aligned}
 R &\sim t^{\frac{1}{2}} && \text{strahlungsdominiert} \\
 R &\sim t^{\frac{2}{3}} && \text{materiedominiert} \\
 R &\sim t^{\frac{2}{3(1+w)}} && \text{allgemein mit } w = p/\rho
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

In Abb. 2.6 sind die Kurven für die Strahlungs- und Massendichten gezeigt. Etwa  $10^6$  Jahre nach dem Urknall sind beide Dichten etwa gleich. Das war auch etwa die Zeit, als sich Strahlung und Materie voneinander entkoppelten und sich getrennt voneinander entwickelten.

**Temperaturabhängigkeit:** Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz gilt für die Temperaturabhängigkeit der Strahlungsdichte:

$$\rho_s(T) \sim T^4. \tag{2.26}$$

Da andererseits  $\rho_s(T) \sim R^{-4}$  gilt, ergibt sich die Relation:

$$T \sim 1/R \tag{2.27}$$

Damit läßt sich die Temperatur für jede frühere Ausdehnung des Universums angeben:

$$T(R) = (R_0/R) \cdot 2.7 \text{ K} \tag{2.28}$$

Dabei ist 2.7 K die gemessene Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung.

**Alter des Universums:** Aus den Lösungen  $R(t)$  läßt sich die heutige Zeit  $t_0$ , also das Alter des Universums, bestimmen. Da der Verlauf von  $R(t)$  von den Messungen der Hubble-Konstante und der Dichte abhängt, gehen deren Unsicherheiten auch in die Altersbestimmung ein (Abb. 2.7).

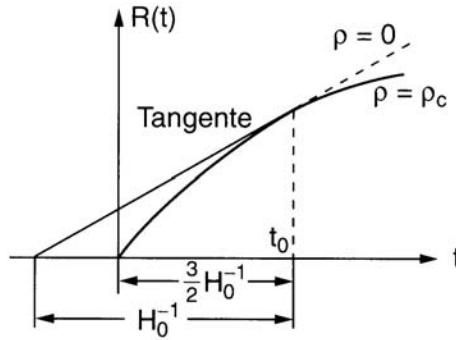


Abbildung 2.7: Abhängigkeit der Altersbestimmung von dem Verlauf der  $R(t)$ -Kurve.

Um ein quantitatives Gefühl für die experimentelle Unsicherheit der Altersbestimmung zu bekommen, betrachten wir zwei Spezialfälle. Wir beginnen mit einem masselosen Universum ( $\rho = 0$ ,  $\Omega = 0 \Rightarrow k = -1$ ), für das aus der Friedmann-Gleichung (2.17) folgt:

$$H(t) R = \dot{R} = \sqrt{-k} c = c \Rightarrow R = ct \quad (2.29)$$

Daraus ergibt sich die sogenannte Hubble-Zeit für das Alter des Universums:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \approx 13.4 \cdot 10^9 \text{ Jahre} \quad (2.30)$$

Für eine höhere Massendichte ergibt sich ein geringeres Alter, wie man aus Abb. 2.7 entnehmen kann. Dazu betrachten wir als weiteres Beispiel ein flaches ( $k = 0$ ), materiedominiertes Universum. Die Annahme der Materiedominanz ist keine wesentliche Einschränkung, weil die strahlungsdominierte Phase relativ kurz ist. Nach den Gleichungen (2.16, 2.24) ergibt sich dann für die Dichte ( $a = 8\pi G/3$ ):

$$\rho = \rho_c = H^2/a = C_m/R^3 \quad (2.31)$$

Dabei ist  $C_m$  eine Konstante, die die Energieerhaltung in Form von Masse festlegt. Die Lösung von (2.17),

$$R(t) = \left( \frac{9}{4} a C_m t^2 \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.32)$$

kann in (2.31) eingesetzt werden:

$$\rho = C_m/R^3 = \frac{4}{9} \frac{C_m}{a C_m t^2} = \frac{1}{a} H^2 \quad (2.33)$$

Daraus ergibt sich für diesen Fall des flachen, materiedominierten Universums

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0}. \quad (2.34)$$

Das Alter des Universums wird heute am genauesten durch die Analyse der Mikrowellen-Hintergrundstrahlung festgelegt [14]:

$$t_0 = (13_{-0.2}^{+0.1}) \cdot 10^9 \text{ Jahre} \quad (2.35)$$

**Bemerkungen zu der Ableitung der Friedmann-Gleichung (2.17):** Die Friedmann-Lemaître-Gleichungen sind Lösungen der Einstein-Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie für eine homogene und isotrope ideale Flüssigkeit mit Energiedichte  $\rho c^2$  und Druck  $p$ :

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + 3\frac{p}{c^2} \right) R \quad (2.36)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} R^2 - k c^2 \quad (2.37)$$

Die zweite Gleichung entspricht der vorher hergeleiteten Gleichung (2.17). Die erste folgt aus der zweiten Gleichung, wenn man die Energiebilanzgleichung (2.22) berücksichtigt.

In der Ableitung der Friedmann-Gleichung (2.17) hatten wir Argumente der Newton'schen Mechanik benutzt. Die Rechtfertigung im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie basiert auf dem Birkhoff'schen Theorem (siehe Lehrbücher der Kosmologie, zum Beispiel [11]): Eine sphärisch symmetrische Massenverteilung in einem leeren Raum wird außerhalb der Verteilung durch die Metrik eines Massenpunktes in einem leeren Raum beschrieben (Schwarzschild-Metrik). Das entspricht ganz der Aussage der Newton'schen Mechanik, dass das Feld einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung nach außen wie eine im Zentrum konzentrierte Masse wirkt. In beiden Fällen gilt, dass sich innerhalb einer mit der Verteilung konzentrischen Kugel alle Kräfte von Massen außerhalb der Kugel aufheben.

Für die Aufstellung der Energiegleichung (2.13) benutzen wir dann eine Kugel mit Radius  $l$ , der mit  $R$  skaliert:

$$l = \frac{R}{R'} l' \quad (2.38)$$

Wegen dieses Zusammenhanges ergibt sich bei Einsetzen des Kugelradius  $l$  und nach entsprechender Reskalierung von  $k$  auf die Werte  $0, \pm 1$  die Differentialgleichung (2.17) für  $R(t)$ , .

Für den Newton'schen Ansatz ist es noch notwendig, dass der Radius der Kugel viel größer als der Schwarzschild-Radius ist. Der Schwarzschild-Radius,  $r_S = \frac{2MG}{c^2}$ , ist der Radius um einen Punkt der Masse  $M$ , innerhalb dessen auf Grund der Gravitation kein Licht nach außen dringen kann ('schwarzes Loch').

**Die kosmologische Konstante:** Die Lösungen  $R(t)$  der Friedmann-Gleichungen beschreiben mit den heutigen Parametern immer ein expandierendes Universum. Die Friedmann-Gleichung (2.36) zeigt außerdem, dass die Beschleunigung der Expansion immer negativ ist, dass also die Expansion durch die Gravitation abgebremst wird, wenn Dichte und Druck nicht negativ werden können. Um ein statisches Universum beschreiben zu können, hatte Einstein 1916 die sogenannte kosmologische Konstante  $\Lambda$  in seine Gleichungen eingeführt. Der Effekt dieser Konstanten kann als 'negativer Druck des Vakuums' oder als 'Anti-Gravitation' interpretiert werden. Die kosmologische Konstante kann in die Friedmann-Gleichungen (2.36, 2.37) eingeführt werden, indem die Dichte und der Druck wie folgt modifiziert werden:

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \rho + \rho_{\text{Vakuum}} = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \\ p &\rightarrow p + p_{\text{Vakuum}} = p - c^2 \frac{\Lambda}{8\pi G} \end{aligned} \quad (2.39)$$