

Moderne Physik: Elementarteilchenphysik, Astroteilchenphysik, Kosmologie

Ulrich Husemann
Humboldt-Universität zu Berlin
Sommersemester 2008

Kapitel 3

Grundlagen: Relativitätstheorie und Quantenphysik

Spezielle Relativitätstheorie

Postulate

- Theorie basiert auf zwei Postulaten:
 - Relativität: „Die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form“
 - Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: „Lichtgeschwindigkeit hat in jedem Inertialsystem denselben Wert.“
- Materialien:
 - Originalarbeit: A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik 17 (1905) 891.
 - U. E. Schröder: Spezielle Relativitätstheorie (Deutsch 1994)
 - Visualisierung: <http://www.tempolimitlichtgeschwindigkeit.de/>

Lorentz-Transformation

- Klassische Mechanik: Galilei-Transformation zwischen Inertialsystemen S und S' (mit Geschwindigkeit v bewegt):
$$x' = x - vt$$

- Ansatz, der Galileo-Transformation als Grenzfall enthält:

$$x' = \gamma(v)[x - vt]$$

mit $\gamma(v) \rightarrow 1$ für $v \ll c$

- Benutze Postulat der Relativität

$$x = \gamma(v)[x' + vt']$$

Lorentz-Transformation

- Benutze Postulat der konstanten Lichtgeschwindigkeit

- Sende Lichtblitz bei $t = t' = 0$

- Ausbreitung nach t in System S : $x = ct$

- Ausbreitung nach t' in System S' : $x' = ct'$ (dasselbe c !)

- Ersetze t und t' in obigem Gleichungssystem (mit $\beta = v/c$)

$$x' = \gamma(v)[x - v/c \cdot x] = \gamma(v)x[1 - \beta]$$

$$x = \gamma(v)[x' + v/c \cdot x'] = \gamma(v)x'[1 + \beta]$$

- Multiplikation der Gleichungen ergibt:

$$\gamma(v)^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

Lorentz-Transformation

- Transformationsgleichung für Zeiten t und t' durch Rückeinsetzen:

$$ct' = x' = \gamma(x - vt) = \gamma(ct - \beta x)$$

$$ct = x = \gamma(ct' + \beta x')$$

- Bemerkung: Gleichungen sind ähnlich für x und ct , können als Matrixgleichung geschrieben werden

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

(3 Raumdimensionen: Richtungen senkrecht zur Bewegungsrichtung unbeeinflusst)

Folgerungen

- Längenkontraktion
 - Objekt ruht in bewegtem Bezugssystem S'
 - S : Objekt erscheint verkürzt

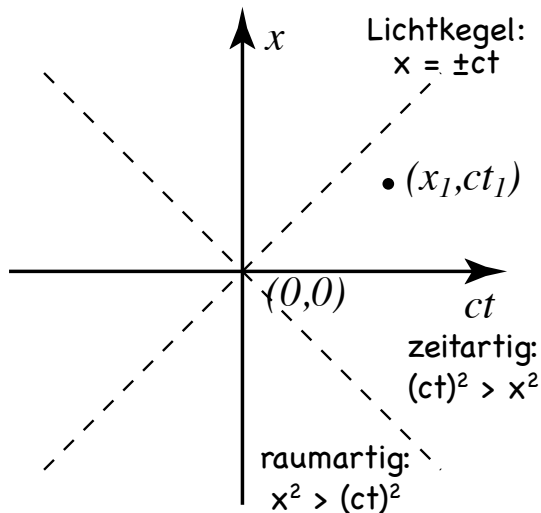
$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta x'$$

- Zeitdilatation
 - Zeitdifferenz zwischen zwei Ereignis an festem Ort x' in S'
 - S : Zeitdifferenz im bewegten System S' verlängert („bewegte Uhren gehen langsamer“)

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma \Delta t'$$

Raum-Zeit-Abstand

- Messung von „Abständen“ (Skalarprodukten) im vierdimensionalen Raum → unabhängig vom Bezugssystem = lorentzinvariant



- „Abstand“ auf Lichtkegel ist in allen Bezugssystemen 0

$$(ct_1)^2 - x_1^2 = 0$$

$$(ct'_1)^2 - x'^2_1 = 0$$
- Allgemeiner „Abstand“

$$s^2 = (ct)^2 - x^2$$
- Übung: zeige, dass s lorentzinvariant ist

Energie und Impuls

- Konjugierte Variable
 - Zeit ↔ Energie (Energieerhaltung durch zeitliche Symmetrie)
 - Ort ↔ Impuls (Impulserhaltung durch Translationssymmetrie)
- Relativistische Ausdrücke für Energie und Impuls

$$E = \gamma mc^2$$

$$pc = \gamma mvc = \beta \gamma mc^2$$

- Skalarprodukt für Energie/Impuls: „invariante Masse“

$$E^2 - (pc)^2 = (\gamma mc^2)^2 - (\beta \gamma mc^2)^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) (mc^2)^2$$

$$= (mc^2)^2$$

Beispiele

- Aus obigen Gleichungen (verallgemeinert für 3D):
 - „Boostvektor“: $\vec{\beta} = \frac{\vec{p}c}{E}$
 - γ : Verhältnis totale Energie zu Ruheenergie $\gamma = \frac{E}{mc^2}$
- Schwerpunktsenergie (center of mass system – CMS) einer Zweiteilchenkollision

$$\begin{aligned} E_{\text{CMS}} &= \sqrt{(E_1^2 + E_2^2)^2 - (\vec{p}_1c + \vec{p}_2c)^2} \\ &= \sqrt{E_1^2 - (p_1c)^2 + E_2^2 - (p_2c)^2 + 2E_1E_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2c^2} \\ &= \sqrt{(m_1c^2)^2 + (m_2c^2)^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2 \cos \theta)} \end{aligned}$$

Beispiele

- Beispiel: Teilchen 2 ruht ($E_2 = m_2$), Ruhemassen vernachlässigbar („Fixed Target“-Experiment)

$$E_{\text{CMS}} \approx \sqrt{2E_1m_2}$$

→ zur Verfügung stehende Energie zur Produktion neuer Teilchen ($E=mc^2$) wächst mit \sqrt{E}

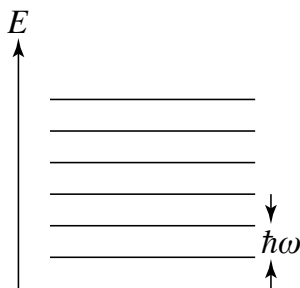
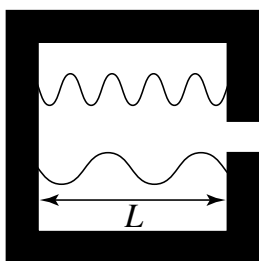
- Beispiel: Teilchen 1 und Teilchen 2 kollidieren frontal ($\theta = \pi$) mit derselben Energie ($E_1 = E_2 = E$), Ruhemassen vernachlässigbar, $\beta \approx 1$ („Collider“-Experiment)

$$E_{\text{CMS}} \approx 2E$$

→ zur Verfügung stehende Energie wächst mit E

Quantenphysik

Schwarzkörperstrahlung



- Modell: Schwarzer Hohlraum im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur T
- Klassisches Spektrum (Energiedichte pro Frequenz): Rayleigh-Jeans-Gesetz

$$u(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T$$

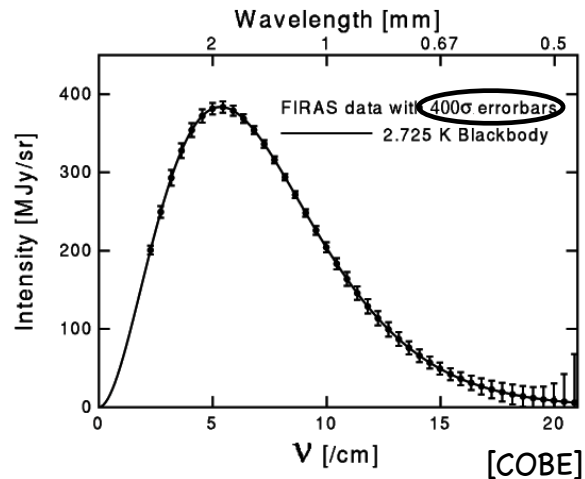
- $\int u(\omega) d\omega \rightarrow \infty$ für $\omega \rightarrow \infty$ („UV-Katastrophe“)
- Lösung (Planck, 1900): Ersetze kontinuierliches Energiespektrum ($k_B T$ für jeden Oszillator) mit diskretem Spektrum mit $\Delta E = \hbar\omega$ (Planck'sches Wirkungsquantum $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$)

Schwarzkörperstrahlung

- Besetzung der Energiezustände nach Bose-Einstein-Statistik:

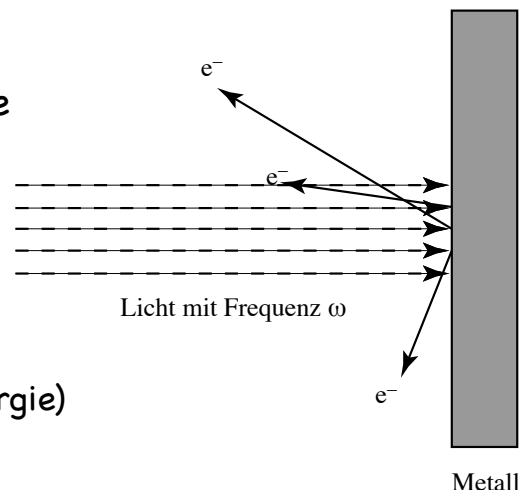
$$u(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega}{\exp\left[\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right] - 1}$$

- Kosmische Mikrowellenhintergrundstrahlung: perfekter schwarzer Körper mit $T = 2,725 \text{ K}$



Lichtelektrischer Effekt

- Experiment: bestrahle Metallplatte mit Licht, messe Energie der herausgelösten Elektronen
- Überraschendes Ergebnis:
 - Grenzenergie E_{\max} (klassisch: mehr Intensität \rightarrow mehr Energie)
 - Keine Elektronen, wenn Lichtfrequenz unterhalb Schwelle liegt (klassisch: bei hoher Intensität können immer Elektronen ausgelöst werden)



Lichtelektrischer Effekt

- Erklärung (A. Einstein, 1905): Licht besteht aus Teilchen (später: „Photonen“) mit Energie $E = \hbar\omega$
- Maximale Energie der Elektronen: $E_{\max} = \hbar\omega - W$
(mit W Austrittsarbeit = Energie, um e aus Metall zu lösen)
- Minimale Frequenz: $\hbar\omega_{\min} = W$
- Proportionalitätskonstante \hbar dieselbe wie bei Schwarzkörperstrahlung → fundamentale Naturkonstante

Schrödingergleichung

- Wellenfunktion ψ beschreibt quantenmechanischen (QM) Zustand
- Wahrscheinlichkeit, QM-Zustand in d^3x zu finden
 $|\psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$
- QM-Observable = Erwartungswerte von (hermiteschen) Operatoren
- Schrödingergleichung: Zeitentwicklung von ψ

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -H\psi(\vec{x}, t)$$

Unschärferelation

- H: Hamiltonoperator (totale Energie des QM-Systems)
 - Mit Impuls- und Energieoperatoren $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, $\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$
 - Freies Teilchen: $H_0 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2$
 - Teilchen in Potenzial V: $H = H_0 + V$
- Superpositionsprinzip: Überlagerung von Wellen zu Wellenpaketen (Schrödingergleichung linear in ψ)
- Heisenberg'sche Unschärferelation (aus Operatoreigenschaften von Ort/Impuls)
 - Lokalisierung von Wellenpaketen: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$
 - Nützlich für Teilchenphysik: $\Delta E \cdot \Delta t \gtrsim \hbar$
(Vorsicht: t ist kein Operator)

Wirkungsquerschnitt

- Experimente der Teilchenphysik: Streuung von Teilchen
 - Rutherford: α -Teilchen auf Goldfolie
 - Ab Sommer 2008 bei LHC: Protonen auf Protonen
- Wahrscheinlichkeit der Produktion von Teilchen H abhängig von:
 - Fluss der einfallenden Teilchen (Teilchen pro Fläche)
 - Teilchendichte in Objekt, am dem gestreut wird („Target“)
 - Wahrscheinlichkeit pro Einzelstreuung: effektive Fläche σ der Wechselwirkung („Wirkungsquerschnitt“) \rightarrow intrinsische Eigenschaft des physikalischen Prozesses, nicht von außen beeinflussbar

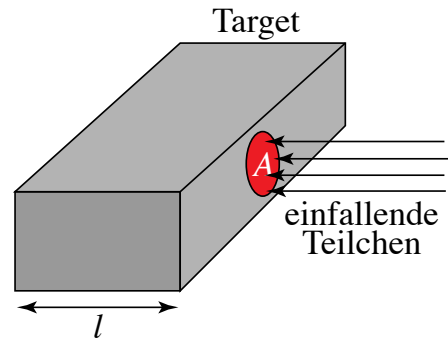
Wirkungsquerschnitt

- Trefferwahrscheinlichkeit I

$$P = \frac{\text{Reaktionsrate}}{\text{Einfallrate}} = \frac{\dot{N}_R}{\dot{N}_E}$$

- Trefferwahrscheinlichkeit II:

$$P = \frac{N_{\text{target}} \cdot \sigma}{A} \quad \text{mit } N_{\text{target}} = \frac{\rho N_A}{M} \cdot V$$



- Gleichsetzen:

$$\dot{N}_R = \sigma \cdot \underbrace{\left(\dot{N}_e \cdot \frac{\rho N_A}{M} \cdot \frac{V}{A} \right)}_{\text{Luminosität } \mathcal{L}}$$

Reaktionsrate proportional
zu Wirkungsquerschnitt

- Einheit: 1 b = 1 barn = 10^{-28} m^2
- Geometrischer Querschnittsfläche Protons ($r=10^{-15}\text{m}$): 31 mb
- Top-Quarks bei Tevatron: 8 pb (40 Milliarden mal kleiner!)

Beispiel: Harte Kugel

- Flächenelement: $d\sigma = db \cdot b d\phi$

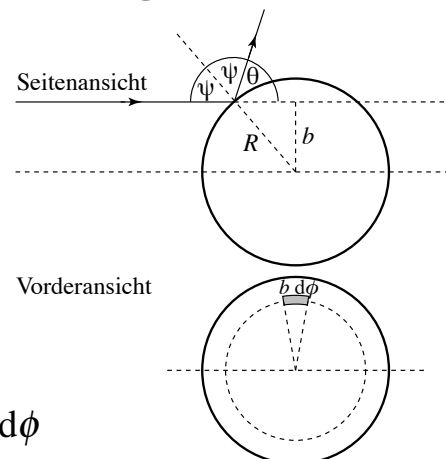
$$\sin \psi = b/R, \quad 2\psi + \theta = \pi$$

$$b = R \sin(\pi/2 - \theta/2) = R \cos(\theta/2)$$

$$db = -R/2 \sin(\theta/2) d\theta$$

$$\begin{aligned} d\sigma &= -R/2 \sin(\theta/2) d\theta \cdot R \cos(\theta/2) d\phi \\ &= (R/2)^2 (-\sin(\theta) d\theta d\phi) \end{aligned}$$

$$\sigma = - \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{R^2}{4} = \pi R^2$$



Fermis Goldene Regel

- (Näherungsweise) QM-Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit von Anfangs- zu Endzustand in Potenzial V („Fermis Goldene Regel“)

$$P_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{if}|^2 \frac{dN}{dE_f}$$

mit „Matrixelement“ $\mathcal{M}_{if} = \int d^3x \psi_f^* V \psi_i$

- Wirkungsquerschnitt:

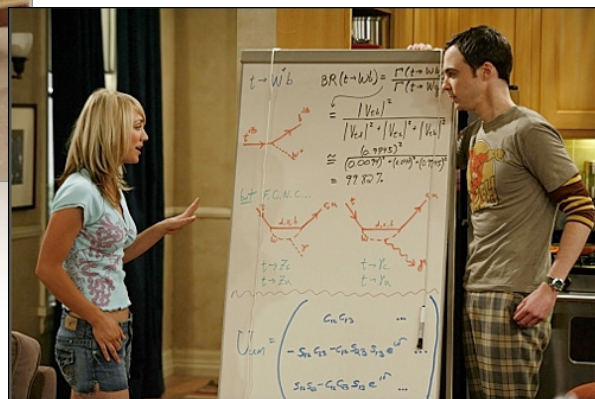
$$\sigma = \frac{P_{if}}{\text{Teilchenfluss}} \cdot (\text{Zahl der Endzustände})$$

- Wichtiges Resultat: Wirkungsquerschnitt (Messung) proportional zum Quadrat des Matrixelements (Theorie)

Feynman-Diagramme



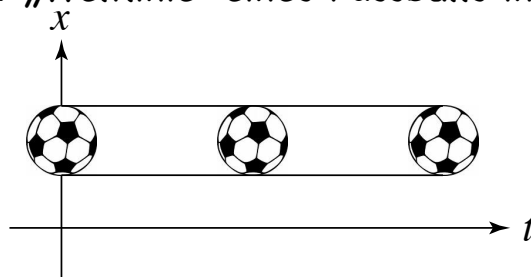
R. Feynman vor seinem Van



The Big Bang Theory (CBS-Serie)

Feynman-Diagramme

- Anschauliche graphische Darstellung von Prozessen zwischen Elementarteilchen
- Vorschrift zur (näherungsweise) Berechnung des Matrixelements: Entwicklung in Kopplungskonstante, z.B. Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \approx 1/137$ für Elektrodynamik
- Beispiel 1: „Weltlinie“ eines Fussballs in Ruhe

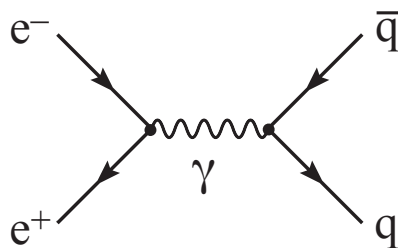


Moderne Physik (PK 23a), HU Berlin, Sommersemester 2008, Vorlesung 2

25

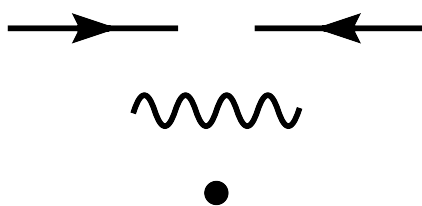
Feynman-Diagramme

- Beispiel 2: e^+e^- -Streuung



$$|\mathcal{M}_{if}|^2 = \left| \begin{array}{c} \text{Diagramm} \end{array} \right|^2$$

- Wichtige Elemente:



- Fermionlinien
(Antiteilchen: rückwärts in der Zeit)
- Bosonlinien
- Vertizes
(Rechenregel: $\sqrt{\alpha}$ pro Vertices)

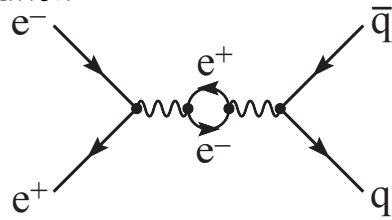
Moderne Physik (PK 23a), HU Berlin, Sommersemester 2008, Vorlesung 2

26

Feynman-Diagramme

- Beispiel 3: „Korrekturen höherer Ordnung“ (in α , d.h. mehr Vertizes) zu Beispiel 2

- Vakuumpolarisation



- Vertexkorrektur

