Mo, 09.06.08

Übung zur Vorlesung "Statistische Methoden der Datenanalyse"
H. Kolanoski, A. Schälicke – SS 2008

Übung 6

6.1 Stratified Sampling

Schreiben Sie eine Programmroutine zur einfachen MC-Integration einer ein-dimensionalen Funktion $f(x)$ im Intervall $x \in [0, 1]$

a) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = 2x \ . \tag{1}$$

Welche Varianz des Integrals erwarten Sie, wenn für eine MC-Integration 400 Punkte gewürfelt werden?

b) Wiederholen Sie die MC Integration 100 Mal, und vergleichen Sie die experimentelle Varianz mit der Erwartung.

c) Erweitern Sie den Integrationsalgorithmus so, dass nun erst zwei Teilbereiche einzeln integriert (gemittelt) werden, aber die gleiche Gesamtzahl an Punkten gewürfelt wird. Welchen Einfluss hat dieses Vorgehen auf die Varianz des Integrals?

6.2 Multidimensionale Integration mit der Cuba-Bibliothek

a) Bestimmen Sie die Abhängigkeit der Präzision eines einfachen numerischen Integrationsverfahrens (z.B. Rechteckverfahren *in PyCuba*) von der Anzahl der verwendeten Stützpunkte für eine d-dimensionale Gaussfunktion mit $d = 1, 4, 8$ im Einheits-Hyperkubus, und vergleichen Sie mit einer entsprechenden MC Integration.

b) Die Cuba-Bibliothek stellt eine Reihe von Integrationsroutinen bereit. Untersuchen Sie die Effizienz des Vegas- und des Divonne-Algorithmus, mit folgenden Funktionen:

$$f_1(x, y) = \sin^2(12\pi\, x) \cdot \sin^2(12\pi\, y)$$
$$f_2(x, y) = \frac{1}{(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{10}} \cdot \frac{1}{(y - \frac{3}{4})^2 + \frac{1}{10}}$$
$$f_3(x, y) = \frac{1}{(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{10}} \frac{1}{(y - \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{10}} + \frac{1}{(x - \frac{3}{4})^2 + \frac{1}{10}} \frac{1}{(y - \frac{3}{4})^2 + \frac{1}{10}}$$

c) Zusatz: Vergleichen Sie die Partitionierungen für $f_2(x, y)$ und $f_3(x, y)$.

6.3 Akzeptanz eines Detektors

Eine zylindrische Driftkammer mit Außenradius R =456,5 mm und Länge $L = 980$ mm soll zur Messung eines Wirkungsquerschnitts verwendet werden. Bestimmen Sie die Akzeptanz, d.h. den zu erwartenden Anteil der Ereignisse, bei denen die Teilchen den gesamten Detektor durchlaufen (also $|\tan\theta| < L/2R$), für folgende Bedingungen.

a) Isotrop verteilte Impulsvektoren aus dem Koordinatenursprung im Zentrum des Detektors (Energie konstant).

b) Analog zu a), aber mit einer Abhängigkeit vom Polarwinkel $\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 1 + \cos^2\theta$

c) **Zusatz:** Erzeugen Sie Impulse entsprechend des 3-Jet Wirkungsquerschnitts, gegeben durch

$$w(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)}$$

mit den Energieanteilen:

$$x_1 = \frac{E_1}{E}\,, \qquad x_2 = \frac{E_2}{E}\,, \qquad x_3 = \frac{E_3}{E}\,, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

Nimmt man Teilchen 1 als Referenz, dann ergeben sich die Winkel zu Teilchen 2,3 zu

$$\cos\theta_{12} = 1 - \frac{2(1 - x_3)}{x_1 x_2} \qquad \cos\theta_{13} = 1 - \frac{2(1 - x_2)}{x_1 x_3}$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen alle 3 Jets im Akzeptanzbereich, wenn zusätzlich $0 < x_1, x_2 < 1 - y$ und $x_1 + x_2 > 1 + y$ mit $y = 0.1$ gefordert wird (Jade algorithmus)?

Hinweise

- Arrays in Numpy können Bedinungen als Argument erhalten, z.B.

```
f = lambda x : x**2
x = random.uniform(size=100)
y = f(x)
yminus = y[x<0.5]
```

  erzeugt einen neuen Array, der nur Funktionswerte $f(x_i)$ für $x_i < \frac{1}{2}$ enthält.

- Vor der Verwendung der Cuba-Bibliothek über das Python-Interface PyCuba, muss die Umgebungsvariable mittels `export PYTHONPATH=/users/eel/dreas/python/packages` gesetzt sein.

- In PyCuba werden unter anderem folgende Funktionen bereitgestellt:

```
pycuba.rectangle(dim,fun)
pycuba.divonne(dim,fun)
```

  Weitere Informationen zur Cuba-Bibliothek gibt es unter http://www.feynarts.de/cuba. Online-Hilfe zu PyCuba gibt es z.B. auf der Webseite der Übung und durch

```
import pycuba
pycuba?
pycuba.divonne?
```