28.04.08

Übung zur Vorlesung "Statistische Methoden der Datenanalyse"
H. Kolanoski, A. Schälicke – SS 2008

Übung 2

2.1 Winkelverteilung

Die Winkelverteilung eines Zweikörperzerfalls bezüglich einer Vorzugsrichtung (z.B. die Polarisationsrichtung des zerfallenden Teilchens) sei durch folgende Funktion gegeben:

$$f(\cos\theta) \sim 1 + \alpha \cos\theta \tag{1}$$

Anmerkung für Interessierte: Eine solche Verteilung ist für $\alpha \neq 0$ paritätsverletzend, weil sie durch den Vorzeichenwechsel des Cosinus eine Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bezüglich der Polarisationsrichtung beschreibt. Man findet sie zum Beispiel in dem Zweikörperzerfall polarisierter Λ-Baryonen: $\Lambda \to \pi p$.

a) Bestimmen Sie die Normierung und die Verteilungsfunktion.

b) Erzeugen Sie nach der Inversionsmethode jeweils eine Stichprobe für $\alpha = \pm 0.5$ und stellen Sie die Verteilung der Stichprobe graphisch dar.

c) Wie b), aber die Erzeugung erfolgt mit der *Hit-or-Miss*-Methode.

2.2 Bestimmung von Pi

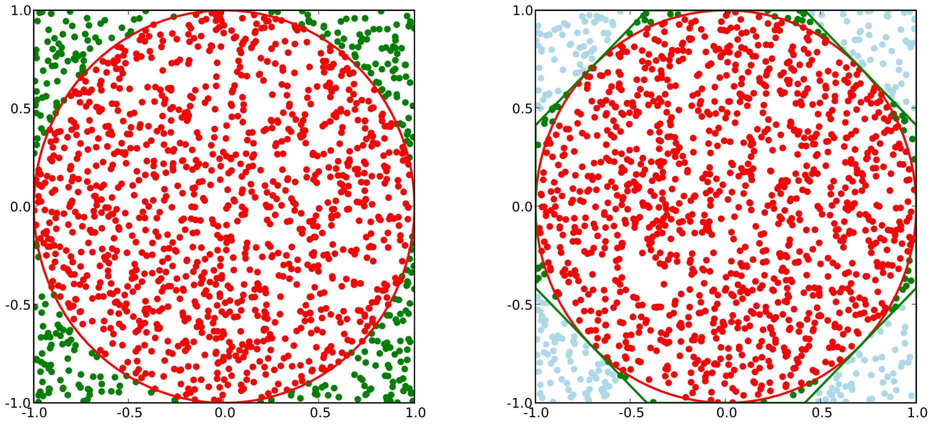
Schätzen Sie die Zahl π mit der *Hit-or-Miss*-Integrationsmethode ab.

a) Würfen Sie zunächst zwei Werte-Paare (x,y) gleichverteilt im Bereich [-1,1] z.B. $N =$ 10000 mal.

b) Bestimmen Sie den Anteil der Werte-Paare, welche innerhalb eines Kreis mit Radius $R = 1$ liegt, und schätzen Sie darüber π ab.

c) Wiederholen Sie die Bestimmung $m = 100$ mal und sortieren Sie die Einzelergebnisse in ein Histogramm. Berechnen Sie die Standardabweichung aus dieser Stichprobe. Wie oft muss im Mittel gewürfelt werden, um π auf drei Nachkommastellen zu bestimmen (also der 1σ-Fehler kleiner als 10^{-3} wird)?

d) Wie ändern sich die Ergebnisse aus c, wenn Sie als Referenzfläche nicht das gesamte Quadrat (Fläche $A = 4$) sondern ein umschreibendes Achteck (Fläche $A = 8(\sqrt{2} - 1)$, siehe Skizze auf Blattrückseite) verwenden?



2.3 Momente einer Verteilung und Charakteristische Funktion

Die charakteristische Funktion einer Verteilungsfunktion $f(x)$ wurde in der Vorlesung definiert als

$$\phi_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, f(x)\, dx \tag{2}$$

Zeigen Sie dafür folgenden nützliche Relationen:

a) Normierung der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\phi_x(0) = 1 \tag{3}$$

b) Lineare Transformation: $f(ax + b)$

$$\phi_{ax+b}(t) = e^{itb}\phi_x(at) \tag{4}$$

c) Faltung unabhängiger Zufallszahlen x und y

$$\phi_{x+y}(t) = \phi_x(t) \cdot \phi_y(t) \tag{5}$$

d) Bestimmung algebraischer Momente einer Verteilung

$$\left.\frac{d\phi_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = i^k\, \mu'_k \tag{6}$$

womit auch die Rekonstruktion einer Verteilung aus ihren Momenten

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu'_k}{k!} (it)^k\, dt \tag{7}$$

möglich ist.