Ausgabe: 18.5.2006
Abgabe: 1.6.2006

Übung zur Vorlesung
”Experimentelle Elementarteilchenphysik”
SS 2006
H. Kolanoski, J. Kretzschmar

5. Übung

5.1 Berechnung der Zerfallsbreite des Myons (20 Punkte)

Berücksichtigt man die V–A-Struktur des schwachen Stromes, so lässt sich mittels der Feynman-Regeln folgendes Matrixelement für den Myonzerfall $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ aufstellen:

$$\mathcal{M} = \frac{4\mathrm{G_F}}{\sqrt{2}} \bar{u}(k)\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u(p)\bar{u}(p')\gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} v(k')$$

Die impulsabhängigen Teilchen- und Antiteilchenspinoren sind mit u und v bezeichnet. Die Größen p, p', k und k' sind die Viererimpulse von Myon, Elektron, Myon– und Elektronneutrino.
Wenn Sie den Hinweisen folgen, gelingt die Berechnung der Zerfallsbreite des Myons auch ohne tiefergehende Kenntnisse.

a) Legen Sie Ihr Koordinatensystem ins Ruhesystem des Myons, wobei die z-Achse in Flugrichtung des Elektrons zeigt. Vernachlässigen Sie die Elektronmasse im Ausdruck des Elektronspinors und zeigen Sie, dass bei Polarisation des Myonspins in positive z-Richtung das Matrixelement $\mathcal{M}$ durch folgenden Ausdruck gegeben wird:

$$\mathcal{M} = 16\mathrm{G_F}\sqrt{\mathrm{m}_\mu \omega\omega' E'} \sin\frac{\theta_{\nu_\mu}}{2} \cos\frac{\theta_{\bar{\nu}_e}}{2}$$

Die Winkel θ_{ν_μ} und $\theta_{\bar{\nu}_e}$ bezeichnen die Winkel zwischen der Richtung von Myon– bzw. Elektronneutrino und der Flugrichtung des Elektrons. E', ω, ω' sind die Energien von Elektron, Myon– und Elektronneutrino.

Hinweis: Berechnen Sie das Matrixelement durch explizites Einsetzen der Spinoren und γ–Matrizen. Bei Vernachlässigung der Elektronmasse und dem Teilchenimpuls längs der z-Achse sind die linkshändigen Spinoren u_L für Elektron bzw. Neutrino und v_L für das Antineutrino in folgender Weise gegeben:

$$u_\mathrm{L} = \sqrt{E}\begin{pmatrix}\chi_2\\ -\chi_2\end{pmatrix}\ , \quad v_\mathrm{L} = \sqrt{E}\begin{pmatrix}-\chi_2\\ \chi_2\end{pmatrix} \quad \text{mit}\ \ \chi_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ , \quad \chi_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Der Myonspinor hat im Myon-Ruhesystem die einfache Form:

$$u_{1,2} = \sqrt{2\mathrm{m}_\mu}\begin{pmatrix}\chi_{1,2}\\ 0\end{pmatrix}$$

Die Spinoren bezüglich einer beliebigen Quantisierungsachse erhält man durch Drehung. Die Drehmatrix, die diese Drehung im Spinorraum beschreibt, wird durch die Elemente $d^{1/2}_{m'm}$ beschrieben. Für die gedrehten Spinoren χ'_1 und χ'_2 findet man:

$$\chi'_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \;,\quad \chi'_2 = \begin{pmatrix} -e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass im Matrixelement für die zweite mögliche Myonpolarisationsrichtung der Term $\cos\frac{\theta_{\bar{\nu}_e}}{2}$ in obigem Ausdruck für $\mathcal{M}$ durch $\sin\frac{\theta_{\bar{\nu}_e}}{2}$ ersetzt wird. Quadrieren Sie beide Matrixelemente und mitteln sie über die beiden Anfangszustände. Warum muss hier zuerst quadriert und dann gemittelt werden?

c) Um den erhaltenen Ausdruck weiter zu vereinfachen, zeigen und verwenden Sie die folgende Relation:

$$4\omega E' \sin^2\frac{\theta_{\nu_\mu}}{2} = \mathrm{m}_\mu^2 - 2\mathrm{m}_\mu\omega'$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass bei Vernachlässigung der Elektron- und Neutrinomassen

$$(k+p')^2 = 4\omega E' \sin^2\frac{\theta_{\nu_\mu}}{2}$$

gilt. Dann verwenden Sie die Viererimpulserhaltung in der Form $(k+p')^2 = (p-k')^2$.

d) Unter Berücksichtigung von “Fermis goldener Regel” sowie des Phasenraumes findet man für die differentielle Myon-Zerfallsbreite

$$\frac{d\Gamma}{d\omega' dE'} = \frac{1}{64\pi^3}\frac{1}{\mathrm{m}_\mu}\overline{|\mathcal{M}|^2}\;.$$

Benutzen Sie Ihren Ausdruck für das gemittelte Quadrat der Matrixelemente $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ und berechnen Sie durch Integration über ω' das Spektrum $\frac{d\Gamma}{dE'}$ der freiwerdenden Elektronen. Skizzieren Sie das Spektrum.

Hinweis: Der Integrationsbereich ist durch $\frac{\mathrm{m}_\mu}{2} - E' < \omega' < \frac{\mathrm{m}_\mu}{2}$ gegeben. (Warum?)

e) Berechnen Sie die Zerfallsbreite Γ und die mittlere Lebensdauer $\tau = 1/\Gamma$. Vergleichen Sie τ mit dem PDG-Wert $\tau_\mu \approx 2.197 \cdot 10^{-6}$ s.