Ausgabe: 4.5.2006
Abgabe: 11.5.2006

Übung zur Vorlesung "Experimentelle Elementarteilchenphysik" SS 2006 H. Kolanoski, J. Kretzschmar

3. Übung

3.1 Drehungen von Pauli-Spinoren (8 Punkte)

Es soll die 2×2-Matrix bestimmt werden, mit der ein Spin-1/2-Dublett bei einer Rotation mit dem Winkel θ um die y-Achse zu transformieren ist.

a) Schreiben Sie den Operator der endlichen Drehung als Exponentialfunktion des entsprechenden Generators der Drehung auf (analog der in der Vorlesung gezeigten endlichen Drehung des (p,n)-Dubletts im Isospinraum).

b) Berechnen Sie explizit die 2×2-Matrix durch Reihenentwicklung der Exponentialfunktion. Das Ergebnis lässt sich als Linearkombination der Pauli-Matrizen und der 2×2-Einheitsmatrix schreiben.

c) Ordnen Sie den berechneten Elementen der 2×2-Matrix die so genannten d-Funktionen zu (siehe zum Beispiel im Particle Data Book unter Clebsch-Gordon-Koeffizienten; Link: http://pdg.lbl.gov/2005/reviews/clebrpp.pdf)?

d) Um welchen Winkel muss ein Spin-1/2-Zustand gedreht werden, um wieder in den ursprünglichen Zustand überzugehen?

e) Geben Sie die allgemeine Drehung, die durch die 3 Euler-Winkel (α, β, γ) gegeben ist, durch die entsprechende Exponentialfunktion für ein Spin-1/2-Dublett wie in a) an (die Reihenfolge der Drehung sei (z,x',z")). Es genügt der Ansatz, die Matrix braucht nicht explizit berechnet zu werden.

3.2 Nicht-abelsche Transformation von Eichfeldern (8 Punkte)

Verifizieren Sie, dass für eine nicht-abelsche Eichgruppe mit den Generatoren T_a, der Kommutatorrelation

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \tag{1}$$

und der Eichtransformation

$$\psi(x) \quad \rightarrow \quad \psi'(x) = \psi(x) \cdot e^{igT_a\alpha_a(x)} \tag{2}$$

$$D^\mu = \partial^\mu - igT_a W_a^\mu \quad \rightarrow \quad D'^\mu = \partial^\mu - igT_a W_a'^\mu \tag{3}$$

die Felder W_a^μ wie folgt zu transformieren sind:

$$W_a^\mu \to W_a^{'\mu} = W_a^\mu - \partial^\mu \alpha_a - ig f_{abc} \alpha_b W_c^\mu \tag{4}$$

Zeigen Sie dazu die Invarianz der Lagrange-Dichte

$$L = \bar{\psi} \left(i\gamma_\mu D^\mu - m \right) \psi \tag{5}$$

unter der infinitesimalen Eichtransformation

$$U(\vec{\alpha}) = 1 + igT_a \alpha_a(x). \tag{6}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass gilt:

$$\bar{\psi} \left(i\gamma_\mu T_a \right) \psi \to \bar{\psi} \left(i\gamma_\mu T_a \right) \psi - f_{abc}\, \alpha_b\, \bar{\psi} \left(i\gamma_\mu T_c \right) \psi. \tag{7}$$

Dabei sind Terme höherer Ordnung in den als infinitesimal angenommenen α_a zu vernachlässigen.

3.3 Bausteine der Materie und ihre Wechselwirkung (6 Punkte)

a) Geben Sie Spin S, schwachen Isospin (I, I_3), elektrische Ladung Q sowie schwache Hyperladung Y für die folgenden Teilchen in tabellarischer Form an:

$$\nu_\mathrm{e}\,,\ \mathrm{e}_\mathrm{L}^-\,,\ \mathrm{e}_\mathrm{R}^-\,,\ \mathrm{u}_\mathrm{L}^-\,,\ \mathrm{d}_\mathrm{L}^-\,,\ \mathrm{u}_\mathrm{R}^-\,,\ \mathrm{d}_\mathrm{R}^-\,,\ \mathrm{W}^+\,,\ \mathrm{W}^-\,,\ \mathrm{Z}\,,\ \gamma$$

Hinweis:
Die Hyperladung Y ist durch die Gell-Mann-Nishijima Beziehung gegeben:

$$\mathrm{Y} = 2(\mathrm{Q} - \mathrm{I}_3)\,.$$

Die Felder Z und γ sind Mischungen der Eichfelder W^3 und B. Für Z und γ ist deshalb nur die dritte Komponente I_3 des schwachen Isospins eine wohldefinierte Quantenzahl.

b) Tragen Sie die obigen 11 Teilchen in einer Tabelle gegen die Bosonen W^+, W^-, Z, γ auf, und kennzeichnen Sie mit einem Kreuz Teilchenkombinationen, die aneinander koppeln.

c) Geben Sie für 4 der obigen Teilchenkombinationen Feynman-Graphen physikalischer Prozesse an, in denen diese Kopplungen auftreten.