Ausgabe: 27.4.2006
Abgabe: 4.5.2006

Übung zur Vorlesung ”Experimentelle Elementarteilchenphysik” SS 2006 H. Kolanoski, J. Kretzschmar

2. Übung

2.1 Feldstärketensor und Maxwell-Gleichungen (12 Punkte)

Der von A_μ abhängige Teil der QED Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \; . \tag{1}$$

Der 4er-Strom ist gegeben durch $j^\mu = (\rho, \vec{j})$.
Der elektromagnetische Feldstärketensor hat die Form

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\mu \downarrow, \nu \rightarrow) \tag{2}$$

Wie üblich, werden die Lorentz-Indizes mit dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ hoch- oder heruntergezogen, zum Beispiel $\partial_\mu = (\partial/\partial t, \vec{\nabla}) = \partial^\nu g_{\mu\nu}; F_{\mu\nu} = F^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}$ usw. (Summationskonvention).

a) Zeigen Sie, dass aus dem QED-Lagrangian (1) durch Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung für jede Komponente A^ν ($\nu = 0, .., 3$)

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial^\mu A^\nu \right)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \tag{3}$$

die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in der Form

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu \tag{4}$$

folgen und dass (4) den 2 inhomogenen Maxwellgleichungen mit $\vec{E}$ und $\vec{B}$ entspricht.

b) Zeigen Sie, dass aus der Definition von $F_{\mu\nu}$ (2) die homogenen Maxwell-Gleichungen in der Form

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \tag{5}$$

folgen und dass (5) den 2 homogenen Maxwellgleichungen mit $\vec{E}$ und $\vec{B}$ entspricht.

c) Zeigen Sie, dass aus (4) die Kontinuitätsgleichung $\partial^\nu j_\nu = 0$ folgt.

d) Leiten Sie aus (4) weiterhin die Wellengleichung für A^μ her:

$$\Box A - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \tag{6}$$

Was ergibt sich für die Lorentz-Eichung ($\partial_\mu A^\mu = 0$)?

2.2 Lokale Eichtransformation und Massenterm (8 Punkte)

a) Wie transformiert sich der Dirac-Strom $j^\mu = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ unter lokaler Eichtransformation?

b) Zeigen Sie, dass die Klein-Gordon-Gleichung für ein massives Vektorfeld W^ν

$$(\Box + M^2)W^\nu - \partial^\nu\partial_\mu W^\mu = j^\nu \tag{7}$$

nicht invariant unter lokaler Eichtransformation $W^\nu \to W^\nu - \partial^\nu\alpha(x)$ ist.

c) Die Greensche Funktion von (7) ist

$$\frac{1}{q^2 + M^2} \,. \tag{8}$$

Bestimmen Sie die Fouriertransformierte und zeigen Sie, dass diese einem Coulombpotential mit gedämpfter Reichweite entspricht.