

Übung zur Vorlesung
"Experimentelle Elementarteilchenphysik"
SS 2006

H. Kolanoski, J. Kretzschmar

1. Übung

Aufgabe 1: Dirac-Gleichung (6 Punkte)

Leiten Sie aus der Dirac-Gleichung die Kontinuitätsgleichung für die Ladungstromdichte $j_{\text{em}}^\mu = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ des Elektrons her. Sie benötigen dazu auch die Dirac-Gleichung für den adjungierten Spinor $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$.

Aufgabe 2: Chirale Fermionenzustände und Helizität (14 Punkte)

Die Operatoren $P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$ und $P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ werden als rechts- und linkshändige Projektionsoperatoren bezeichnet.

- Zeigen Sie, daß P_R und P_L die Beziehungen von Projektionsoperatoren, d.h. $P_i^2 = P_i$, $P_R + P_L = 1$ und $P_R P_L = 0$, erfüllen.
- Entgegen der obigen Bezeichnungsweise entsprechen die Projektionen $u_R = P_R u$ und $u_L = P_L u$ im allgemeinen nicht den rechts- und linkshändigen Eigenzuständen des Helizitätsoperators. Wählen Sie für den Dirac-Spinor u die Darstellung

$$u = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m}\phi \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie u_R und u_L . Zeigen Sie, daß im relativistischen Limit, $m/E \rightarrow 0$, u_R und u_L Eigenzustände des Helizitätsoperators,

$$\frac{\vec{\Sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|} & 0 \end{pmatrix}$$

sind. Hinweis: Benutzen Sie die Beziehung $(\vec{\sigma}\vec{p})^2 = \vec{p}^2\mathbf{1}$.

- Wie werden die adjungierten Spinoren $\bar{u}_{L,R} = u_{L,R}^\dagger\gamma^0$ aus $\bar{u} = u^\dagger\gamma^0$ projiziert, d. h. wie lauten die zu $u_{R,L} = P_{R,L}u$ analogen Beziehungen?
- Zeigen Sie, daß sich die Ladungstromdichte j_{em}^μ schreiben läßt als $j_{\text{em}}^\mu = -e(\bar{\Psi}_L\gamma^\mu\Psi_L + \bar{\Psi}_R\gamma^\mu\Psi_R)$.
- Ersetzen Sie im Ausdruck für den Strom die Vektorkopplung γ^μ durch die V-A-Kopplung $\frac{1}{2}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$. Leiten Sie die zu (d) analoge Aufspaltung her.