

Abbildung 3.12: Die charakteristische Abhängigkeit des mittleren Energieverlustes von β oder γ bei gegebener Masse.

3.7.2 Bremsstrahlung

Beim Durchgang durch Materie werden geladene Teilchen im Coulomb-Feld eines Kerns beschleunigt. Man kann den Bremsstrahlungsprozess in Abb. 3.14 als Rutherford-Streuung mit zusätzlicher Abstrahlung betrachten.

Wir betrachten im Folgenden den Energieverlust pro Weglänge für Elektronen, bei denen wegen der $1/m^2$ -Abhängigkeit die Bremsstrahlung (siehe weiter unten) schon bei relativ geringen Energien dominiert (in Blei bereits ab etwa 7 MeV, in Luft ab etwa 100 MeV; für die etwa 200-mal schwereren Myonen wird Bremsstrahlung ab einigen 100 GeV wichtig)

Der Energieverlust pro Weglänge ist proportional zu der Energie des Elektrons:

$$\frac{dE}{E} = -\frac{dx}{x_0} \Rightarrow \left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = -\frac{E}{x_0} \quad (3.34)$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$E(x) = E_0 \cdot e^{-\frac{x}{x_0}} \quad (3.35)$$

Das heißt, auf der Weglänge x_0 hat ein Elektron im Mittel $1/e$ seiner ursprünglichen Energie verloren. Die dadurch definierte Strahlungslänge x_0 hängt von den Eigenschaften des Mediums ab. Eine gute Näherung der etwas komplizierteren exakten Formel für die Strahlungslänge ist (Bezeichnungen wie in der Bethe-Bloch-Formel (3.30)):

$$\frac{1}{x_0} = 4 \alpha r_e^2 Z(Z+1) \cdot \frac{N_A \cdot \rho}{A} \cdot \ln \left(\frac{278}{Z^{1/2}} \right) \quad (3.36)$$

Tabelliert findet man die Strahlungslänge als $\rho \cdot x_0$ mit der Dimension g/cm^2 .

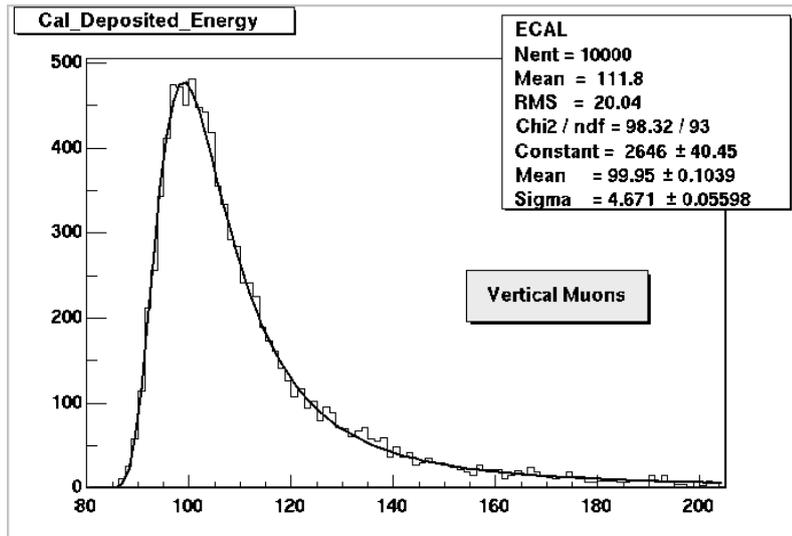


Abbildung 3.13: Beispiel einer Landau-Verteilung (Energieverlust von 10 GeV Myonen in einem Kalorimeter).

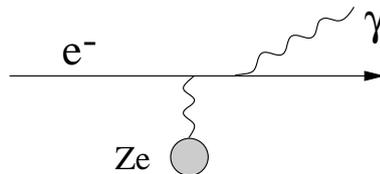


Abbildung 3.14: Bremsstrahlung bei der Rutherford-Streuung im Coulomb-Feld eines Kerns.

Der Strahlungs- und Ionisationsenergieverlust zeigen eine unterschiedliche Abhängigkeit von der Energie E , der Masse m des Teilchens und von der Kernladung Z des Mediums:

$$\begin{aligned} \text{Ionisation:} & \quad \sim Z \cdot \ln E/m \\ \text{Bremsstrahlung:} & \quad \sim Z^2 \cdot E/m^2 \end{aligned}$$

Die Energieabhängigkeit bedingt, daß bei niedrigen Energien die Ionisation und bei höheren die Abstrahlung dominiert. ‘Kritische Energie’, E_k , wird die Energie genannt, an der sich beide Kurven kreuzen (siehe Abb. 3.15):

$$\left(\frac{dE}{dx}(E_k) \right)_{rad} = \left(\frac{dE}{dx}(E_k) \right)_{ion} \quad (3.37)$$

Näherungsweise ergibt sich für die Z -Abhängigkeit der kritischen Energie [14]:

$$E_k \approx \frac{610 \text{ MeV}}{Z + 1.24} \quad (\text{feste und flüssige Medien}), \quad E_k \approx \frac{710 \text{ MeV}}{Z + 0.92} \quad (\text{Gase}). \quad (3.38)$$

Strahlungslänge und kritische Energie sind wichtige Parameter für die Entwicklung eines elektromagnetischen Schauers (siehe weiter unten).

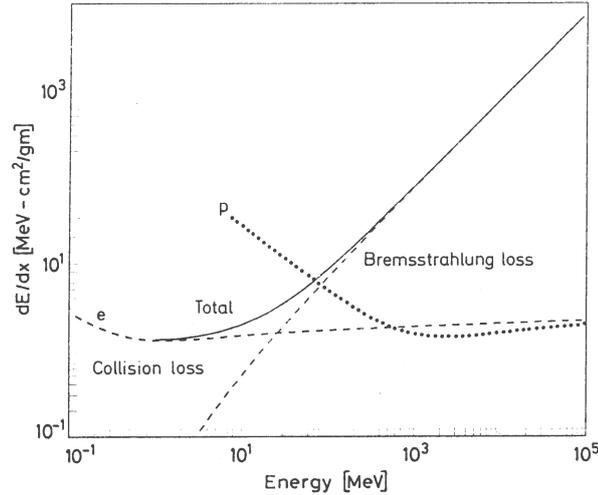


Abbildung 3.15: Energieverlust durch Ionisation und Bremsstrahlung für Elektronen als Funktion der Energie. Die beiden Anteile (gestrichelte Linien) kreuzen sich bei der kritischen Energie. Zum Vergleich ist auch der Energieverlust durch Ionisation für Protonen angegeben.

Der Energieverlust von hochenergetischen Myonen kann annähernd durch eine lineare Energieabhängigkeit beschrieben werden (Abb. 3.16):

$$-\frac{dE}{dx} = a + bE \quad (3.39)$$

Dabei ist a der Energieverlust durch Ionisation (im Sättigungsbereich) und bE der Bremsstrahlungsbeitrag. Die kritische Energie ergibt sich dann aus $a = bE_k^\mu$ oder

$$E_k^\mu = \frac{a}{b} \quad (3.40)$$

Durch Integration über den Energieverlust (3.39) läßt sich mit (3.33) die energieabhängige Reichweite der Myonen mit Anfangsenergie E_0 bestimmen:

$$R(E_0) = \frac{1}{b} \ln(1 + E_0/E_k^\mu) \quad (3.41)$$

Zum Beispiel spielt die Reichweite der Myonen eine wichtige Rolle für die Abschirmung von kosmischer Strahlung in Untergrundexperimenten (Abb. 3.17).

3.7.3 Wechselwirkungen von Photonen

Für die Beschreibung von elektromagnetischen Schauern genügt es, folgende Wechselwirkungen von Photonen mit Materie zu betrachten (Abb. 3.18):

- Photoeffekt: Das Photon überträgt seine gesamte Energie auf ein Hüllenelektron.

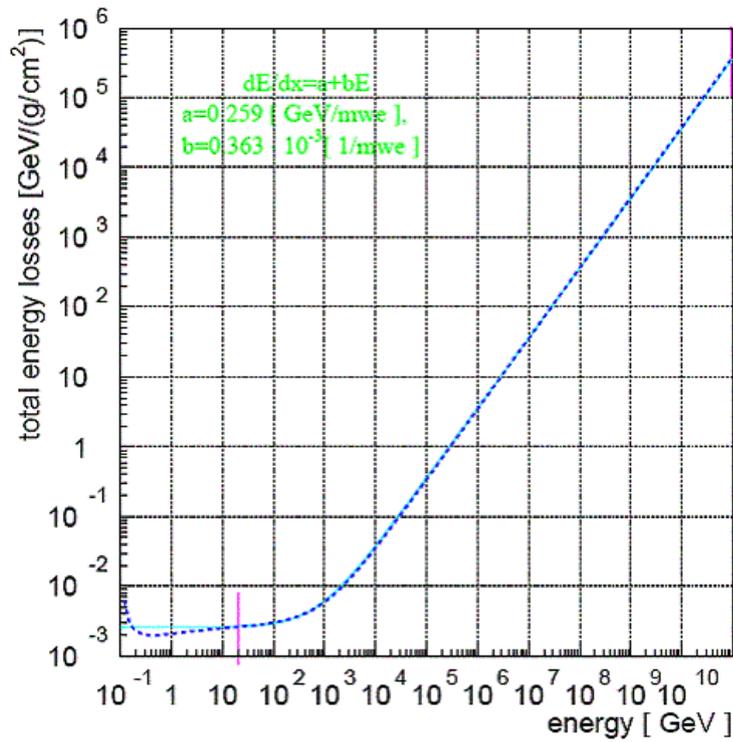


Abbildung 3.16: Energieverlust von Myonen in Eis.

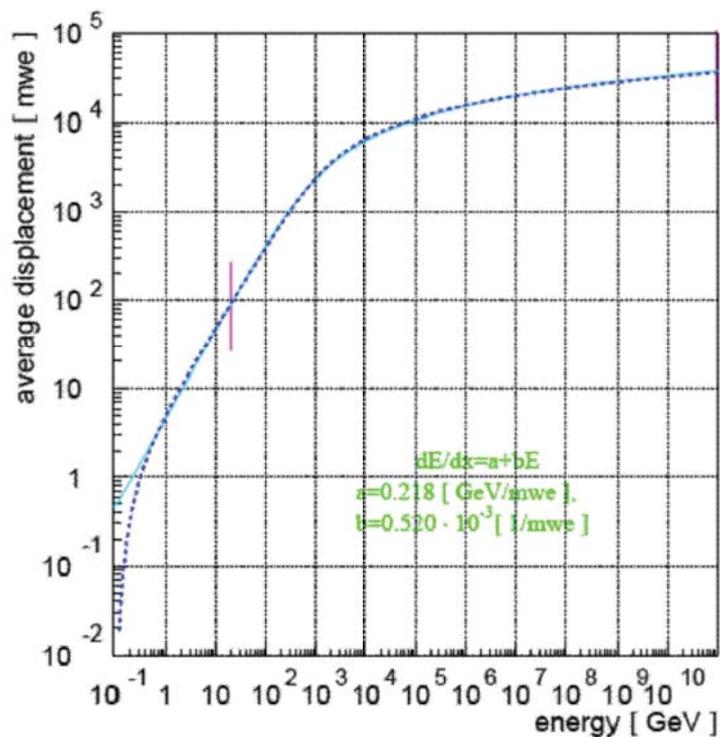


Abbildung 3.17: Reichweite von Myonen in Fels. Die Reichweite (hier 'displacement') ist in den üblichen Einheiten mwe (meter water equivalent: 1 mwe = 100 g cm⁻²) angegeben. Der 'Standardfels' hat die Parameter $\rho = 2.65$ g/cm³, $A = 22$, $Z = 11$.

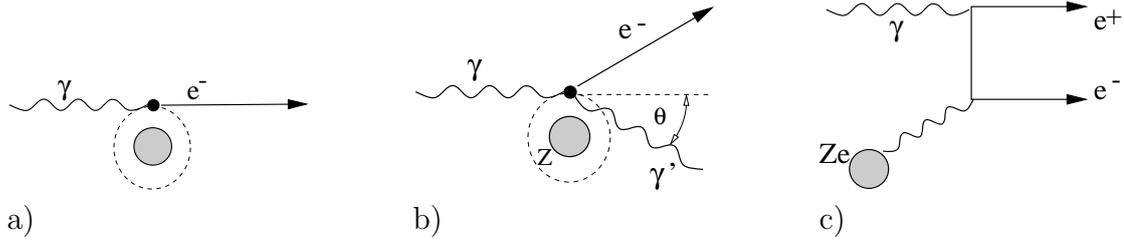


Abbildung 3.18: Diagramme für a) den Photoeffekt, b) den Compton-Effekt und c) die Paarbildung.

- Compton-Effekt: Das Photon wird an einem Hüllenelektron elastisch gestreut. Die Energie des gestreuten Photons läßt sich aus der Kinematik als Funktion des Streuwinkels θ berechnen:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \quad (3.42)$$

In der Gamma-Astronomie spielt der 'inverse Compton-Effekt' eine große Rolle, bei dem beschleunigte, hochenergetische Elektronen ihre Energie auf niederenergetische Photonen, insbesondere CMB-Photonen, übertragen.

- Paarbildung: Das Photon konvertiert im Kernfeld in ein Elektron-Positron-Paar. Der Wirkungsquerschnitt steigt nahe der Schwelle, $E_\gamma > 2m_e$ relativ steil an und erreicht bei hohen Energien einen Sättigungswert entsprechend einer mittleren freien Weglänge, die proportional zur Strahlungslänge ist:

$$\lambda_{Paar} \approx \frac{9}{7} x_0 \quad (3.43)$$

Diese Prozesse dominieren bei Photonenenergien oberhalb der Ionisationsschwelle. Bei niedrigeren Energien spielen Thomson-Streuung, die Streuung niederenergetischer Photonen an Elektronen, und Rayleigh-Streuung, die kohärente Photonstreuung an einem Atom, eine wichtige Rolle. Der Thomson-Wirkungsquerschnitt wird häufig als Bezugsgröße für andere Photon-Wirkungsquerschnitte benutzt:

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi r_e^2}{3} = 0.665 \text{ barn} \quad (3.44)$$

Photonen werden aufgrund der beschriebenen Effekte mit einer Wahrscheinlichkeit proportional der Wegstrecke dx absorbiert beziehungsweise, bei dem Compton-Effekt, aus der ursprünglichen Richtung herausgestreut. Man definiert deshalb einen Absorptionskoeffizienten μ , der die Absorptionswahrscheinlichkeit pro Weglänge angibt:

$$-\frac{1}{N} \frac{dN}{dx} = \mu \quad (3.45)$$

Wenn dN_T die Anzahl der Targetteilchen pro Wegstrecke dx und pro Fläche F und σ der Absorptionsquerschnitt bezeichnen, dann ergibt sich für die Absorptionswahrscheinlichkeit $dN_T \cdot \sigma / F$ und für die Absorptionswahrscheinlichkeit pro Weglänge:

$$-\frac{1}{N} \frac{dN}{dx} = \mu = \frac{dN_T \cdot \sigma}{dx \cdot F} = \rho \frac{N_A}{A} \sigma = n \cdot \sigma, \quad (n = \text{Teilchendichte}) \quad (3.46)$$

Das Reziproke ist die “mittlere freie Weglänge”:

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{n \cdot \sigma} \quad (3.47)$$

Tabelliert sind auch hier wieder die auf die Dichte 1 bezogenen Größen, die sogenannten “Massenabsorptionskoeffizienten”:

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{N_A}{A} \sigma \quad \text{und} \quad \rho \cdot \lambda \quad (3.48)$$

Tabellen für verschiedene Photonenergien und verschiedenen Materialien findet man zum Beispiel auf der Web-Seite von NIST (National Institute of Standards and Technology)².

Die Anzahl der Photonen in einem Strahl folgt nach (3.45) einem Exponentialgesetz:

$$N(x) = N_0 e^{-\mu x} \quad (3.49)$$

Das ist zu vergleichen mit dem Verhalten geladener Teilchen, die durch Ionisation kontinuierlich Energie verlieren und eine diskrete Reichweite haben.

3.7.4 Elektromagnetische Schauer

Ein hochenergetischer elektromagnetischer Schauer (Abb. 3.19) entwickelt sich als eine Abfolge von Bremsstrahlungs- und Paarbildungsprozessen (beides proportional zu Z^2). Ein auf den Absorber auftreffendes Elektron (Abb. 3.19) strahlt ein Photon ab, das Photon bildet ein Elektron-Positron-Paar, die dann auch wieder abstrahlen usw. Der Prozess geht etwa so lange, bis alle Elektronen die kritische Energie E_k erreicht haben und dann im wesentlichen durch Ionisation die Energie abgeben. Die Ionisation der Schauerteilchen kann zum Nachweis des Schauers benutzt werden.

Die Anzahl der Schauerteilchen läßt sich zu

$$N_{max} \approx \frac{E_0}{E_k} \quad (3.50)$$

abschätzen. In einem einfachen Modell (Abb. 3.19 rechts) nimmt man an, dass sich nach einer Strahlungslänge x_0 die Teilchenanzahl jeweils verdoppelt. Dann hat man am Ende des Schauers nach n Strahlungslängen 2^n Teilchen mit der Energie E_k . Daraus lässt sich dann die notwendige Anzahl n von Strahlungslängen eines Detektors berechnen:

$$E_0 = 2^n E_k \Rightarrow n \ln 2 = \ln \frac{E_0}{E_k} \quad (3.51)$$

Wegen des exponentiellen Aufspaltens im Schauer wächst deshalb die Schauertiefe t (und damit die notwendige Detektorgröße) nur logarithmisch mit der Energie:

$$t_{max} \sim \ln E_0 / E_k \quad (3.52)$$

Die Längeneinheit ist die Strahlungslänge x_0 . Da die Anzahl der Schauerteilchen N proportional zur Energie ist, der Fehler von N aber \sqrt{N} ist, ergibt sich:

$$N \sim E \quad \Rightarrow \quad \sigma_E \sim \sqrt{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_E}{E} \sim \frac{1}{\sqrt{E}} \quad (3.53)$$

²<http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/cover.html>

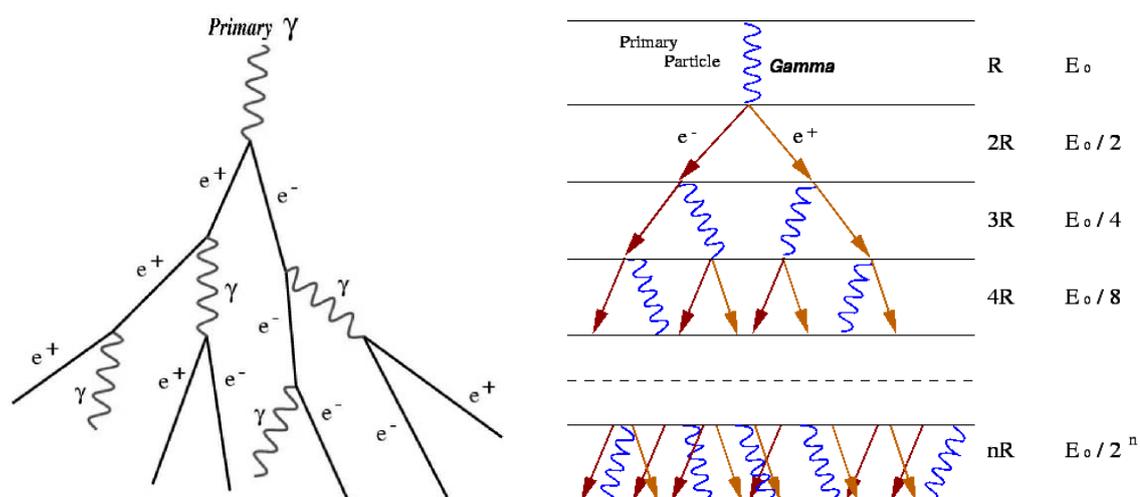


Abbildung 3.19: Entwicklung eines elektromagnetischen Schauers als Abfolge von Bremsstrahlungs- und Paarbildungsprozessen. Rechts das im Text diskutierte einfache Modell für die Schauerentwicklung.

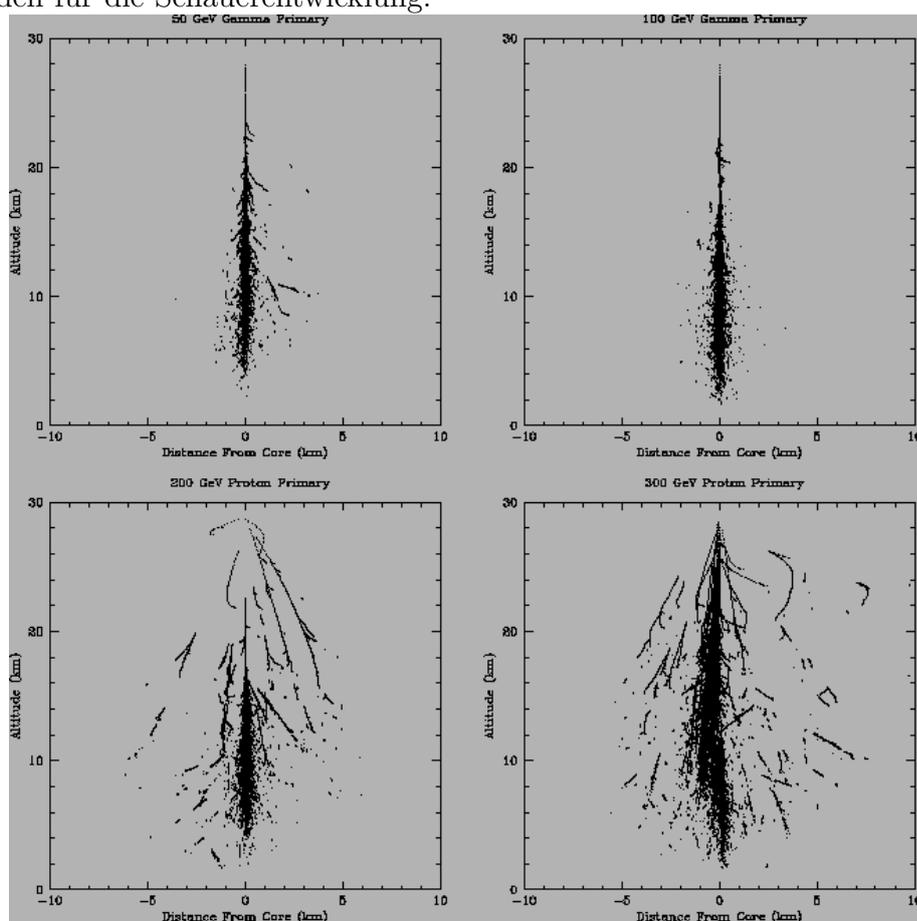


Abbildung 3.20: Vergleich von Profilen elektromagnetischen und hadronischer Schauere verschiedener Energien.

Der relative Fehler wird also mit steigender Energie kleiner. Bei magnetischen Messungen des Impulses steigt er dagegen mit der Energie an (weil die Krümmung immer geringer wird). Deshalb sind bei Energien oberhalb von etwa 10 bis 20 GeV auch bei geladenen Teilchen nur noch ‘kalorimetrische’ Messungen möglich.

Im Vergleich zu hadronischen Schauern sind elektromagnetische Schauer sehr regelmässig und haben eine geringe laterale Ausdehnung (Abb.3.20). Die Strahlungsprozesse im Schauer haben sehr geringe Winkeldivergenz ($\sim 1/\gamma$), die Aufweitung kommt im wesentlichen von der Molière-Streuung der niederenergetischen Elektronen am Kaskadenende. Die Kernreaktionen in einer hadronischen Kaskade haben vergleichsweise große Streuwinkel.

3.7.5 Cherenkov-Effekt

Wenn ein geladenes Teilchen mit der Geschwindigkeit β in einem Medium mit Brechungsindex n schneller ist als das Licht, das heißt (c_0 ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit)

$$c = c_0/n \leq \beta \cdot c_0, \quad (3.54)$$

dann strahlt das Teilchen unter einem Winkel θ sogenannte Cherenkov-Strahlung ab. Der Winkel ist gegeben durch (siehe Abb. 3.21):

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta}. \quad (3.55)$$

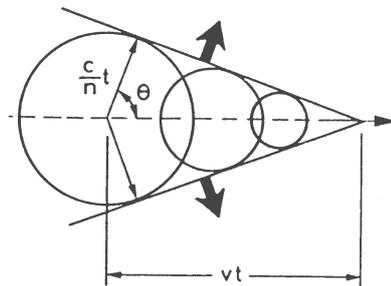


Abbildung 3.21: Ausbildung der Cherenkov-Strahlung.

Aus der Bedingung, dass der Kosinus ≤ 1 sein muß, folgt die Schwelle, ab der Cherenkov-Strahlung entsteht (E_{th} : Schwellenenergie):

$$\frac{1}{n} \leq \beta \quad \Rightarrow \quad E_{th} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \quad (3.56)$$

Die Zahl der emittierten Photonen pro Weglänge und Wellenlängenintervall ist:

$$\frac{dN}{dx d\lambda} = \frac{2\pi\alpha z^2}{\lambda^2} \sin^2 \theta \quad (3.57)$$

Das Spektrum bevorzugt also kurze Wellenlängen (die Abklingbecken von Kernreaktoren leuchten deshalb blau). Für das Wellenlängenintervall $\Delta\lambda = 400 - 700$ nm ergibt sich numerisch:

$$\frac{dN}{dx} \approx 500 \cdot z^2 \cdot \sin^2 \theta \frac{\text{Photonen}}{\text{cm}} \quad (3.58)$$