Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik

Sommersemester 2009

Dr. U. Husemann, C. Lange

2. Übungsblatt zur Vorlesung Experimentelle Elementarteilchenphysik

Abgabe: Montag, 4. Mai 2009, in der Vorlesung

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Die Algebra für die Dirac-γ-Matrizen ist definiert durch den Antikommutator $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Rechnen Sie folgende Relationen nach, ohne eine explizite Darstellung der γ-Matrizen zu benutzen:

i) $(\gamma^0)^2 = 1, \qquad (\gamma^i)^2 = -1, \qquad g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = 4$

ii) $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$ für $\mu \neq \nu$

iii) $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$

iv) $(\gamma^5)^2 = 1$ mit $\gamma^5 := \gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

v) $\mathrm{tr}(\gamma^5) = 0, \qquad \mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n-1}}) = 0$, mit $n = 1, 2, 3, \ldots$

Hinweis: Die in der Vorlesung verwendeten 4×4-Einheitsmatrizen sind hier weggelassen.

Aufgabe 5: (16 Punkte)

i) Zeigen Sie, dass folgende Spinoren freier masseloser Teilchen Eigenzustände von γ_5 sind und bestimmen Sie die Eigenwerte:

$$u_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Die Operatoren $P_{R,L}$ projizieren die rechts- und die linkshändigen Anteile aus einem Spinor. Sie sind definiert als $P_{R,L} := \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$. Beweisen Sie, dass die $P_{R,L}$ Projektionsoperatoren sind, d. h. dass gilt:

$$P_L + P_R = 1, \qquad P_R^2 = P_R, \qquad P_L^2 = P_L, \qquad P_R P_L = P_L P_R = 0.$$

iii) Zerlegen Sie $u_{1,2}^{(0)}$ und $v_{1,2}^{(0)}$ mithilfe von $P_{R,L}$ in ihre rechts- und linkshändigen Anteile.

iv) Der Helizitätsoperator ist definiert als die Projektion des Spinoperators eines Teilchens auf seinen Impuls: $\lambda = \vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$. Zeigen Sie, dass $u_{1,2}^{(0)}$ und $v_{1,2}^{(0)}$ Eigenzustände von λ sind. Nehmen Sie dazu $\hat{p} = (0, 0, 1)$ an. Vergleichen Sie die Lösung mit den links- und rechtshändigen Anteilen aus Aufgabenteil iii). Was fällt auf?

Aufgabe 6: (12 Punkte)

Die Lagrangedichte der QED ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

i) Welche Einheiten haben $\mathcal{L}$, ψ, A_μ in natürlichen Einheiten?

ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ invariant ist unter lokalen Eichtransformationen der Form $\psi \to \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi$, wenn A_μ transformiert wie $A_\mu \to A_\mu - 1/q\,\partial_\mu\alpha(x)$.

iii) Was geschieht mit der Eichinvarianz, wenn man einen Term $\sim m'^2 A_\mu A^\mu$ zur Lagrangedichte hinzufügt? Was bedeutet dies für die Eigenschaften des Photons?

Aufgabe 7: (12 Punkte)

Das W-Boson wurde zum ersten Mal durch Experimente UA1 und UA2 am $p\bar{p}$-Collider Sp$\bar{\text{p}}$S direkt durch den Zerfall $W \to e\nu$ ($W^+ \to e^+\nu_e$ und $W^- \to e^-\bar{\nu}_e$) nachgewiesen.

i) Laden Sie die Originalveröffentlichung von UA1 (G. Arnison *et al.*, Phys. Lett. **B126** (1983) 398) über SPIRES herunter und legen Sie sie Ihrer Lösung bei.

ii) Skizzieren Sie die beiden einfachsten Feynmandiagramme für den Prozess $p\bar{p} \to W^\pm$ auf Quarkniveau. Hinweis: $|p\rangle = |uud\rangle$, $|\bar{p}\rangle = |\bar{u}\bar{u}\bar{d}\rangle$.

iii) Für den ersten Nachweis des W-Bosons standen Daten mit einer integrierten Luminosität von $\int L\,\mathrm{d}t = 18\ \mathrm{nb}^{-1}$ zur Verfügung. Die maximale instantane Luminosität war in dieser Zeit $L_{\max} = 5\cdot 10^{28}\,\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$. Wie lange musste die UA1-Kollaboration Kollisionen aufzeichnet, um $18\,\mathrm{nb}^{-1}$ zu erhalten, wenn man annimmt, dass die mittlere instantane Luminosität $\langle L\rangle = L_{\max}/5$ ist?

iv) Der Wirkungsquerschnitt $\sigma(X)$ für die Produktion eines Teilchentyps X an einem Collider hängt mit der integrierten Luminosität wie folgt zusammen:

$$\sigma(X) = \frac{N_X}{\varepsilon_X \int L\mathrm{d}t}.$$

Dabei ist N_X die Zahl der Kollisionen, in denen ein X-Teilchen nachgewiesen wurde, und ε_X die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Detektor nachzuweisen („Effizienz“). Die UA1-Kollaboration hat in $18\,\mathrm{nb}^{-1}$ sechs Ereignisse nachgewiesen. Wie hoch war die Effizienz ε_W? Der Wirkungsquerschnitt $\sigma(p\bar{p} \to W \to e\nu)$ beträgt etwa 0.6 nb.

v) Die W-Boson-Masse wird häufig indirekt über die transversale Masse m_T des Positron-Neutrino-Paares gemessen. Man erhält m_T, indem man in der Formel für die invariante Masse des Positron-Neutrino-Paares die Größen E und $\vec{p}$ durch $E_T := E\sin\theta$ und $\vec{p}_T := (p_x, p_y, 0)$ ersetzt. Zeigen Sie, dass für große Transversalimpulse p_T^e des Positrons und p_T^ν des Neutrinos m_T gegeben ist durch

$$m_T = 2\,p_T^e\,p_T^\nu\,(1 - \cos\phi^{e\nu}),$$

wobei $\phi^{e\nu}$ der Winkel zwischen Positron und Neutrino in der transversalen Ebene ist.