

---

# Physik der Gluonen

---

## 5.1 QCD als Theorie der starken Wechselwirkung

In den 1970er Jahren wurde die Quantenchromodynamik (QCD) als die fundamentale Theorie der starken Wechselwirkung postuliert und danach sukzessive experimentell bestätigt. Wie in Abschnitt 2.2.4 diskutiert, beschreibt die QCD die Wechselwirkung zwischen Objekten, die die Quantenzahl „Farbladung“ besitzen, den Quarks und den Gluonen. Die QCD beruht auf der nichtabelschen Eichgruppe  $SU(3)$ , so dass die Austauschteilchen der QCD, die Gluonen, ebenso Farbladung besitzen. Ein wichtiger experimenteller Befund ist das „Confinement“, also die Tatsache, dass es keine freien farbgeladene Teilchen gibt, sondern diese in Hadronen gebunden sind. Im Gegensatz dazu gibt es bei hohen Energien die „asymptotische Freiheit“, nach der man farbgeladene Teilchen in Hadronen also quasi-frei betrachten darf.

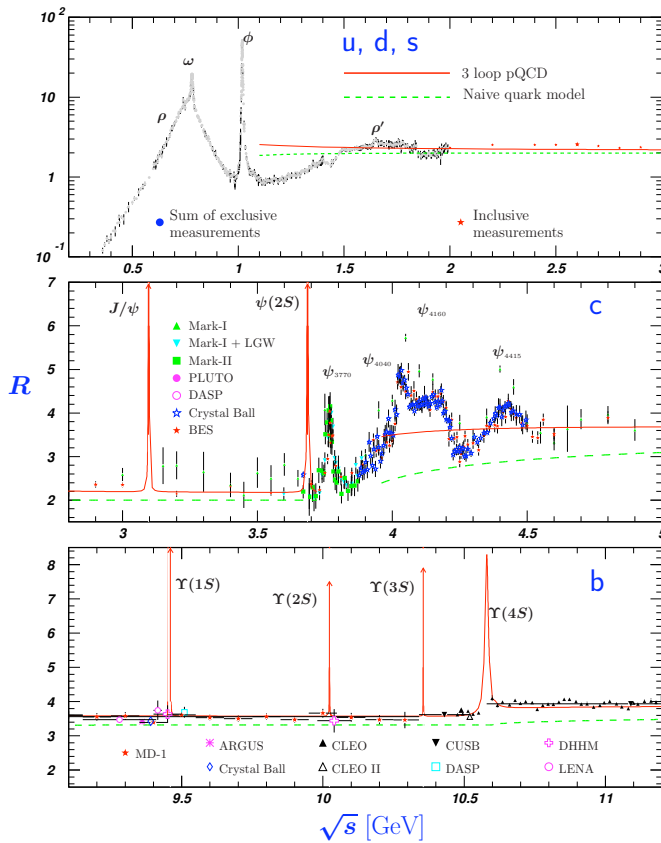
Bei Energien, für die man die QCD störungstheoretisch behandeln kann („perturbative QCD“), können die Vorhersagen der QCD an Teilchenbeschleunigern experimentell überprüft werden, beispielsweise durch Bestimmung der Zahl der Farbfreiheitsgrade, Messung der starken Kopplungskonstante und tiefinelastische Elektron-Nukleon-Streuung. Einige dieser Experimente sollen im folgende beschrieben werden. Weitere Details sind z. B. in [Bet07] zu finden.

### 5.1.1 Zahl der Farbladungen

Der Quarkinhalt des  $\Omega^-$  ( $|sss\rangle$ ) hatte bereits nahegelegt, dass es eine neue Quantenzahl „Farbe“ geben muss. In der QCD gibt es  $N_c = 3$  Farbfreiheitsgrade, als „rot“, „grün“ und „blau“ bezeichnet. Die Größe  $N_c$  kann man dann aus Produktions- oder Zerfallsprozessen an Collidern bestimmen, in denen Quarks beteiligt sind.

### Verhältnis der Hadronproduktion zur Myonpaarproduktion

Die Zahl der Farbladungen kann durch den Vergleich zwischen Hadronproduktion und  $\mu^+\mu^-$ -Produktion in  $e^+e^-$ -Streuung bestimmt werden. Beide sind in niedrigster Ord-



**Abbildung 5.1:** Verhältnis  $R(s)$  der Hadronproduktion in  $e^+e^-$ -Streuung zur  $\mu^+\mu^-$ -Produktion [Ams08]. Oben: Massenbereich der leichten Quarks  $u, d, s$ . Mitte: Charm-Quark-Schwelle. Unten: Bottom-Quark-Schwelle. Das Kontinuum außerhalb der  $q\bar{q}$ -Resonanzen folgt der Vorhersage der perturbativen QCD.

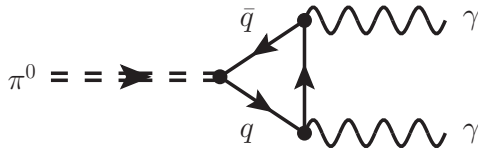
nung reine QED-Prozesse. Man misst dazu das Verhältnis

$$R(s) := \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})(s)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)(s)} = N_c \sum_q q_q^2, \quad (5.1)$$

wobei  $N_c$  die Zahl der Farbladungen und  $q_q$  die Ladung des Quarks  $q$  ist, und die Summe über alle Quarks mit  $2m_q < \sqrt{s}$  geht. Der Wirkungsquerschnitt für Hadronproduktion unterscheidet sich also von dem für  $\mu^+\mu^-$ -Produktion in der Zahl der teilnehmenden Zustände und der Kopplung an die Zustände. Ersteres hängt von ihrer Masse ab: es können nur Paare von Quarks mit Massen unterhalb der zur Verfügung stehenden Schwerpunktsenergie erzeugt werden. Der Wirkungsquerschnitt ist darüber hinaus proportional zu  $N_c$ . Die QED-Kopplung an die Quarks hängt von der Ladung der Quarks ab, was im Prinzip auch Tests der drittelzahligen Ladung von Quarks erlaubt. Die Messung bestätigt die Vorhersagen der QCD von  $R = 2$ , falls nur die drei leichten Quarks  $u, d$  und  $s$  beteiligt sind, wie in Abb. 5.1 gezeigt. Dadurch ergibt sich  $N_c \approx 3$ . Dort ist aber auch zu sehen, dass es auch messbare Effekte von QCD-Korrekturen zum QED-Prozess  $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$  gibt. Gleichzeitig scheint die Hadronisierung, also der Übergang von Quarks zu Hadronen im Endzustand, unabhängig von QED-Prozess und QCD-Korrekturen zu sein, so dass die Messung nicht verfälscht wird. Dies wird in Abschnitt 5.2.4 genauer diskutiert.

### Pionzerfall

Eine weitere Messung der Zahl der Farbladungen kann aus dem Zerfall  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  gewonnen werden ( $|\pi^0\rangle = (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)/\sqrt{2}$ ). Dieser Zerfall findet über einen Fermionschleife



**Abbildung 5.2:** Feynman-Diagramm zum Zerfall neutraler Pionen.

statt, in der sowohl  $u$ - als auch  $d$ -Quarks umlaufen können, siehe Abb. 5.2. Die Zerfallsbreite ergibt sich zu

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{\alpha^2 m_{\pi^0}^3}{64\pi^3 f_{\pi}^2} N_c^2 (q_u^2 + q_d^2)^2. \quad (5.2)$$

Auch hier bestätigt eine Messung der Zerfallsbreite neutraler Pionen einen Wert von  $N_c = 3$  – ohne Farbladung der Quarks hätte das neutrale Pion eine neunfach geringe Breite.

## 5.1.2 Laufende Kopplungskonstanten

### Starke Kopplungskonstante

In der Lagrangedichte der QCD tritt als Kopplungsstärke die Größe  $g \equiv g_S$  auf, siehe Gleichung (2.40). In Analogie zur Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante der QED,  $\alpha := e^2/4\pi$  definiert man die starke Kopplungskonstante als

$$\alpha_S := \frac{g_S^2}{4\pi}. \quad (5.3)$$

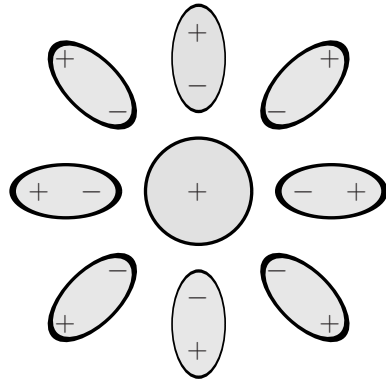
Aufgrund der Vakuumpolarisation in der QCD (Abb. 5.4) ist der Wert von  $g$  in der Lagrangedichte nicht der Wert, der im Experiment gemessen wird, denn es kann zu Abschirmungseffekten kommen, analog zu einer Testladung in einem dielektrischen Medium (Abb. 5.3). Damit wird die Kopplungs„konstante“ energieabhängig. Da der Impuls der Teilchen, die in den Schleifen in Abb. 5.4 umlaufen, nur nach unten durch die Masse der Teilchen begrenzt ist, gehen die Beiträge der Schleifen für große Impuls gegen unendlich, sie besitzen eine „Ultraviolett-Divergenz“.<sup>1</sup> Diese Unendlichkeit kann mit verschiedenen Techniken reguliert werden, so dass die divergenten Anteile unter Kontrolle sind, z. B. mit dimensionaler Regularisierung, bei der die Schleifenintegrale in  $4 - \varepsilon$  Dimensionen ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) ausgeführt werden:

$$\int_m^{\infty} \frac{d^4 k}{k^4} \rightarrow \infty \Rightarrow \mu^{\varepsilon} \int_m^{\infty} \frac{d^{4-\varepsilon} k}{k^4} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\mu}{m}\right)^2 \approx \frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu}{m} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (5.4)$$

Dabei ist  $m$  die Masse der Teilchen in der Schleife, und es wird ein beliebiger Abschneideparameter  $\mu$  eingeführt. Durch die „Renormierung“ werden dann alle Observablen, geschickt so umdefiniert, dass sie endlich sind. Die renormierte Kopplungskonstante ist dann von den Parametern  $m$  und  $\mu$  sowie vom unrenormierten  $\alpha_S$  abhängig und kann als Störungsreihe in  $\alpha_S$  geschrieben werden als

$$\alpha_S^r(\mu^2) = \alpha_S (1 + C(\mu^2/m^2)\alpha_S + \dots). \quad (5.5)$$

<sup>1</sup>Für masselose Teilchen ergeben sich auch „Infrarot-Divergenzen“, die ebenfalls reguliert werden müssen.



**Abbildung 5.3:** Ladungsabschirmung in der QED. In einem dielektrischen Medium wird eine positive Testladung abgeschirmt durch Ausrichtung von Dipolen abgeschirmt.

Um zu garantieren, dass die Physik gleich bleibt, wenn man  $\alpha_S^r$  und  $\mu^2$  undefiniert, muss  $\alpha_S^r$  folgende „Renormierungsgruppengleichung“ erfüllen:

$$\mu^2 \frac{\partial \alpha_S(\mu^2)}{\partial \mu^2} = \frac{\partial \alpha_S(\mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \beta(\alpha_S(\mu^2)) = -\beta_0 \alpha_S^2(\mu^2) - \beta_1 \alpha_S^3(\mu^2) - \dots, \quad (5.6)$$

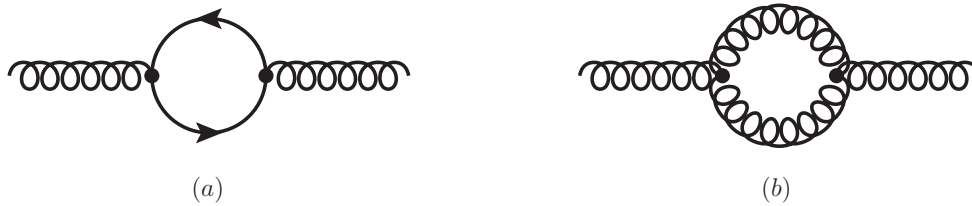
Dabei ist die universelle  $\beta$ -Funktion der QCD perturbativ berechenbar. In erster Ordnung Störungstheorie kann sie aus den Diagrammen in Abb. 5.4 berechnet werden. Gleichung (5.6) wird in dieser Näherung gelöst durch

$$\alpha_S(Q^2) = \frac{\alpha_S^r(\mu^2)}{1 + \beta_0 \alpha_S(\mu^2) \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} = \frac{\alpha_S^r(\mu^2)}{1 + \frac{1}{12\pi} (-2N_f + 33) \alpha_S(\mu^2) \ln \frac{Q^2}{\mu^2}}. \quad (5.7)$$

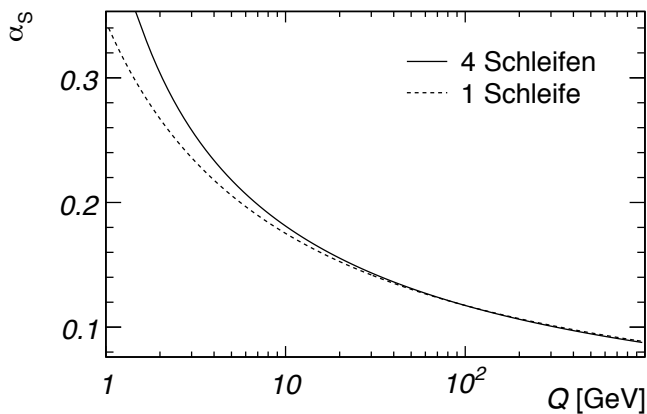
Dabei wurde anschaulich eine unendliche Reihe von Schleifenintegralen wie in Abb. 5.4 summiert, die jeweils Potenzen von  $\alpha_S \ln(Q^2/\mu^2)$  beinhalten (engl.: leading logarithms, LL). Die Gleichung beschreibt die Energieabhängigkeit (das „Laufen“) von  $\alpha_S$ : sie sagt die Kopplung bei einer Energieskala  $Q^2$  vorher, wenn man sie an einer anderen Skala  $\mu^2$  kennt. Die Größe  $Q^2$  ist dabei das Quadrat des Viererimpulsübertrags auf das QCD-System, in  $s$ -Kanal-Prozessen ist beispielsweise  $Q^2 = s$ . Die Bedeutung von  $Q^2$  in tiefinelastischer Streuung wird in Abschnitt 5.2.1 präzisiert. Der entscheidenden Punkt für die Energieabhängigkeit der QCD-Kopplung ist das Vorzeichen der Beta-Funktion  $\beta_0 = (-2N_f + 33)/12\pi$ ;  $\beta_0$  ist für  $N_f \leq 16$  immer positiv ist. Zur Energieabhängigkeit von  $\alpha_S$  tragen nur diejenigen Quarks bei, für die  $(2m)^2 > Q^2$  erfüllt ist. Bei Energien bis zu 200–300 GeV verwendet man daher für die Zahl der Quarkflavors im Standardmodell  $N_f = 5$ . Der erste Summand von  $\beta_0$  stammt aus den Fermionschleifen in Abb. 5.4 (a) und sorgt analog zur QED dafür, dass die Kopplung mit  $Q^2$  ansteigt (Abschirmung). Der zweite Summand aus der Gluonschleife (Abb. 5.4 (b)) führt hingegen zu einer Abnahme der Kopplung mit  $Q^2$  (Antiabschirmung). In der QCD dominiert die Antiabschirmung. Insgesamt wird die QCD-Kopplung also bei niedrigen Energien stärker und bei hohen Energien schwächer, es liegt also Confinement und asymptotische Freiheit vor.

Häufig wird die dimensionslose Größe  $\alpha_S(\mu^2)$  durch die Energieskala  $\Lambda^2$  ersetzt, bei der die QCD nicht-perturbativ wird. Dies ist erfüllt, wenn  $\beta_0 \alpha_S(\mu^2) \ln(\mu^2/\Lambda^2) = 1$ , und somit ergibt sich für das Laufen von  $\alpha_S$

$$\alpha_S(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}}. \quad (5.8)$$



**Abbildung 5.4:** Wichtigste Beiträge zur Vakuumpolarisation in der QCD: (a) Fermionschleife. (b) Gluonschleife.

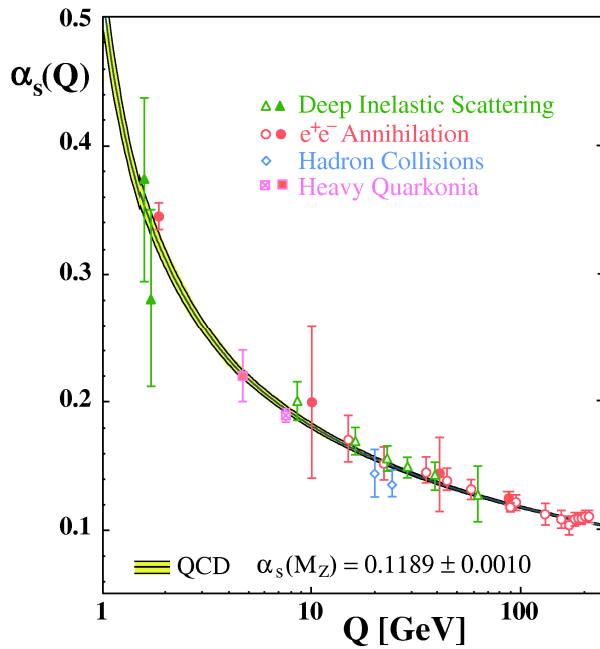


**Abbildung 5.5:** Veränderung der starken Kopplungskonstante  $\alpha_S$  mit dem Impulsübertrag  $Q$ . Die Näherung (5.8) mit  $\Lambda = 93 \text{ MeV}$  wird verglichen mit der Vier-Schleifen-Rechnung mit  $\Lambda = 220 \text{ MeV}$ . Dabei wurden die Werte für  $\Lambda$  so gewählt, dass sich für  $N_f = 5$  ein Wert von  $\alpha_S(m_Z^2) = 0,1189$  ergibt.

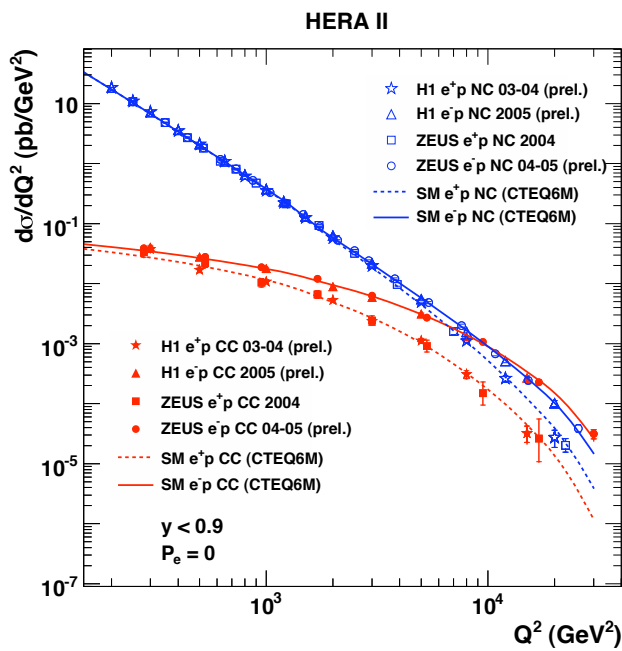
Die Energieskala  $\Lambda^2$  muss dabei experimentell bestimmt werden. Sie hängt von der Ordnung ab, in der die  $\beta$ -Funktion berechnet wurde. In der Literatur wird der Wert von  $\alpha_S$  häufig bei der Z-Boson-Masse angegeben:  $\alpha_S(m_Z^2) = 0,1189(10)$  [Bet07]. Man wählt also  $\Lambda^2$  so, dass  $\alpha_S(m_Z^2)$  zu jeder Ordnung in der Störungstheorie denselben numerischen Wert hat. Die  $\beta$ -Funktion ist mit Korrekturen bis zu vier Schleifen berechnet worden. Das Laufen von  $\alpha_S$ , illustriert in Abb. 5.5, ist über einen weiten Energiebereich in einer Vielzahl von Physikprozessen gemessen worden, wie im folgenden Abschnitt 5.1.3 beschrieben. Die Messungen stimmen mit den Vorhersagen der QCD hervorragend überein. Dadurch konnten alternative theoretische Ansätze, z. B. konstantes  $\alpha_S$  oder QED-artige Gluonen ohne Farbladung, experimentell ausgeschlossen werden. Die Resultate einer Vielzahl von Messungen von  $\alpha_S$  sind in Abb. 5.6 zusammengefasst.

### Laufende Kopplungen und Vereinheitlichung der Kräfte

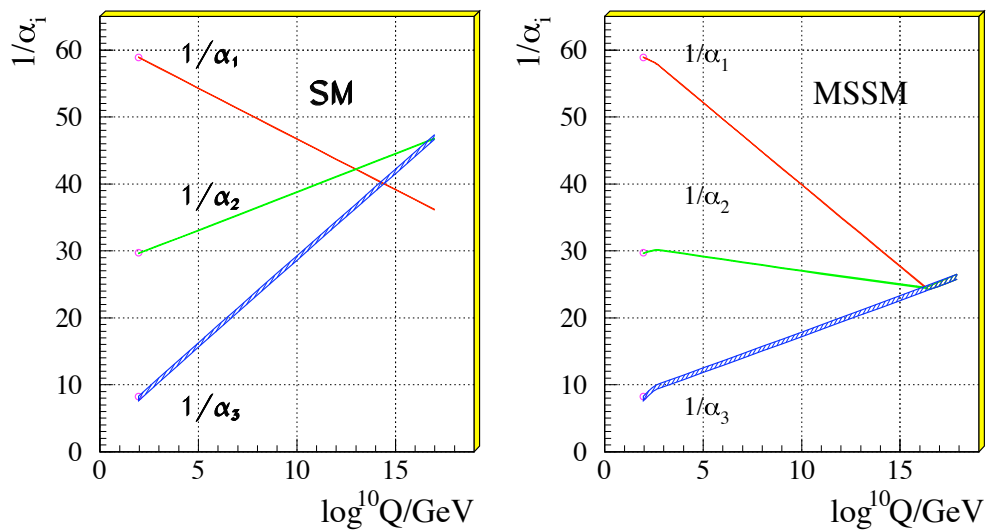
Das Konzept der laufenden Kopplungskonstanten hängt eng mit der Vereinheitlichung von Kräften zusammen. Zwei Theorien sind dann vereinheitlicht, wenn ihre Kopplungen, typischerweise bei hohen Energien, gleich stark werden. Die Vereinheitlichung der elektromagnetischen und der schwachen Kraft ist bei den HERA-Experimenten demonstriert worden. Es konnte gezeigt werden, dass Photon-induzierte und  $W/Z$ -induzierte Prozesse bei hohen Energien etwa dieselbe Stärke besitzen. Dazu vergleicht man in der tiefinelastischen Streuung den Prozess  $ep \rightarrow eX$ , bei dem ein Photon ausgetauscht wird (neutraler Strom) und den Prozess  $ep \rightarrow \nu_e X$ , bei dem ein  $W$ -Boson ausgetauscht wird (geladener Strom). Bei kleinen Impulsüberträgen auf das Proton  $Q^2$  dominiert der neutrale Strom. Wie in Abb. 5.7 gezeigt, haben neutraler und geladener Strom in etwa dieselbe Stärke bei  $Q^2 \approx (100 \text{ GeV})^2$ , der Skala der  $W$ - und  $Z$ -Boson-Masse.



**Abbildung 5.6:** Messungen der starken Kopplungskonstante  $\alpha_s$  und Vergleich mit Vorhersagen der QCD [Bet07].



**Abbildung 5.7:** Vergleich von Wirkungsquerschnitt in der tiefinelastischen Streuung für neutrale Ströme (NC, Photonaustausch) und geladene Ströme (CC, W-Boson-Austausch) bei HERA. Bei  $Q^2 \approx (100 \text{ GeV})^2$  werden die Prozesse gleich häufig [H1].



**Abbildung 5.8:** Laufen der Kopplungskonstanten im Standardmodell und im Minimal-Supersymmetrischen Standardmodell (MSSM) [Ama91, Kaz00].

Im SM haben alle drei Kopplungskonstanten eine Energieabhängigkeit, die sich mit einer Renormierungsgruppengleichung beschreiben lässt. Man erwartet für sehr große Energien eine Vereinheitlichung der Kräfte mit einer gemeinsamen Eichgruppe (grand unified theory, GUT), so dass alle Wechselwirkungen des SM bei sehr hohen Energien jenseits von  $10^{15}$  GeV auf eine gemeinsame „Urkraft“ zurückgeführt werden können. Man vergleicht dazu das Laufen folgender drei Kopplungskonstanten:

$$\alpha_1 := \frac{5 g^2}{3 \cdot 4\pi} = \frac{5}{3} \frac{\alpha}{\cos^2 \theta_W}, \quad (5.9)$$

$$\alpha_2 := \frac{g^2}{4\pi} = \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_W}, \quad (5.10)$$

$$\alpha_3 := \frac{g_S^2}{4\pi} = \alpha_S. \quad (5.11)$$

Wie in Abb. 5.8 gezeigt, treffen sich die drei Kopplungskonstanten im SM nicht in einem Punkt. Dies ist aber dann der Fall, wenn das SM durch Supersymmetrie (SUSY) ergänzt wird. Die einfachsten Version von SUSY, das minimal-supersymmetrische Standardmodell (MSSM), beinhaltet zusätzliche Teilchen, die das Laufen der Kopplungskonstanten genau so beeinflussen, dass die Kopplungen bei etwa  $Q^2 \approx (10^{16} \text{ GeV})^2$  gleich stark werden.

### 5.1.3 Messung der starken Kopplungskonstante

#### Jetproduktion

In den 1970er Jahren waren die Energien an Teilchenbeschleunigern erstmals groß genug, dass sich Bündel von Hadronen, sogenannte „Jets“ nachweisen ließen. Wichtige Resultate zur Jetphysik wurden insbesondere beim  $e^+e^-$ -Collider PETRA erzielt. Im Prozess  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$  entstehen meistens zwei Jets, die in entgegengesetzte Richtungen emittiert werden. Mit einer Wahrscheinlichkeit proportional zu  $\alpha_S$  entstehen aber auch

durch zusätzliche Emission eines Gluons drei Jets. Die starke Kopplungskonstante lässt sich daher aus der relativen Produktionsrate für Ereignisse mit drei Jets bestimmen:

$$R_3(Q^2) := \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow 3 \text{ Jets})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})} = C_1(Q^2) \alpha_S(Q^2) + \text{QCD-Korrekturen}, \quad (5.12)$$

wobei  $C_1$  und die QCD-Korrekturen in perturbativer QCD berechnet werden können. Diese Messungen wurden zuerst bei PETRA, dann aber auch u. a. bei LEP durchgeführt und haben das von der QCD vorhergesagt Laufen von  $\alpha_S$  in einem Bereich von etwa 10–200 GeV bestätigt. Dabei lassen sich bei LEP auch die Rate und die Ereignisform von Vier-Jet-Ereignisse analysieren. Auch Jetproduktion in Proton-Antiproton-Kollisionen in einem vergleichbaren Energiebereich kann für die Messung von  $\alpha_S$  herangezogen werden.

### Tau-Zerfälle

Die Analyse hadronischer Tau-Lepton-Zerfälle erlaubt eine Messung der starken Kopplung bei kleinen Energien  $Q \approx m_\tau^2 \approx (1,8 \text{ GeV})^2$ . Die Messgröße ist das Verhältnis aus hadronischen und leptonischen Tau-Zerfällen

$$R_\tau := \frac{\Gamma(\tau \rightarrow \text{Hadronen})}{\Gamma(\tau \rightarrow e\nu\bar{\nu})} = \frac{1 - \Gamma(\tau \rightarrow e\nu\bar{\nu}) - \Gamma(\tau \rightarrow \mu\nu\bar{\nu})}{\Gamma(\tau \rightarrow e\nu\bar{\nu})}, \quad (5.13)$$

wobei man entweder hadronische Tau-Zerfälle direkt vermessen kann oder aus leptonischen Tau-Zerfällen Rückschlüsse auf  $R_\tau$  bekommt. Die präziseste Messung derzeit ergibt  $\alpha_S(m_\tau^2) = 0,344(9)$  [Dav08] und ist in sehr guter Übereinstimmung mit anderen Messungen, wenn man sie mittels der Energieabhängigkeit von  $\alpha_S$  zu  $Q^2 = m_Z^2$  evolviert:  $\alpha_S(m_Z^2) = 0,1212(11)$ .

### Weitere Messungen von $\alpha_S$

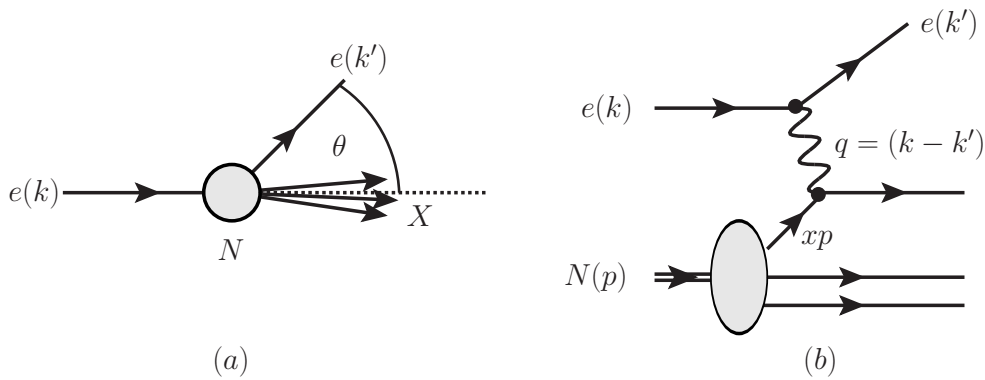
Man kann  $\alpha_S$  auch in Zerfällen von Quarkonia, also gebundenen Zuständen schwerer Quarks, bestimmen. Insbesondere erhält man durch Zerfälle des  $\Upsilon$  ( $|\Upsilon\rangle = |b\bar{b}\rangle$ ) einen Wert  $\alpha_S(m_b^2) = 0,217(21)$ . Eine Messung von  $\alpha_S$  im Bereich von 1–100 GeV ist auch möglich durch Jets in der tiefinelastischen Streuung, in der „Skalenverletzungen“, d. h. Abweichungen vom naiven Quark-Parton-Modell, vermessen werden, wie im folgenden Abschnitt 5.2 beschrieben wird.

## 5.2 Tiefinelastische Streuung

Experimente der tiefinelastischen Streuung (engl.: deep inelastic scattering, DIS) von Elektronen oder Positronen und Nukleonen haben seit den 1960er Jahren viel zum Verständnis der starken Wechselwirkung und der Struktur der Nukleonen beigetragen. Eine genaue Kenntnis der Protonstruktur ist insbesondere bei Experimenten an Hadron-Collidern von Interesse, bei denen keine elementaren Teilchen zur Kollision gebracht werden, sondern Protonen und/oder Antiprotonen. Die Experimente am Elektron-Proton-Collider HERA bei DESY haben dazu wichtige Beiträge geleistet.

Die Diskussion der DIS beschränkt sich hier auf neutrale Ströme, bei denen ein Photon mit einem Nukleon wechselwirkt. Die in Abschnitt 5.1.2 eingeführten geladene





**Abbildung 5.9:** (a) Schematische Darstellung der tiefinelastischen  $eN$ -Streuung im Ruhesystem des Nukleons. (b) Feynman-Diagramm der tiefinelastischen  $eN$ -Streuung im Parton-Modell.

Ströme, bei denen ein  $W$ -Boson ausgetauscht wird und man anstatt des Elektrons ein Neutrino im Endzustand auftritt, werden hier nicht weiter diskutiert.

### 5.2.1 Kinematik und Wirkungsquerschnitt in der DIS

#### Kinematik

Die kinematischen Grundüberlegungen der DIS sind in Abb. 5.9 zusammengefasst: ein Elektron<sup>2</sup> emittiert ein virtuelles Photon und wird unter einem Winkel  $\theta$  gestreut. Das Photon dient als „Versuchssonde“ für das Nukleon. Ein typisches DIS-Ereignis bei HERA ist in Abbildung 5.10 gezeigt. Man definiert nun das Quadrat des Viererimpulsübertrags  $Q^2$ , den Energieübertrag  $\nu$  und die (dimensionslose) Inelastizität  $y$ :

$$Q^2 := -q^2 = -(k - k')^2, \quad \nu := \frac{p \cdot q}{m_N}, \quad y := \frac{p \cdot q}{p \cdot k}, \quad (5.14)$$

mit der Nukleonmasse  $m_N$ . Diese lorentzinvarianten Größen können im Ruhesystem des Nukleons ausgewertet werden. Es ergibt sich  $\nu = E - E'$  und  $y = (E - E')/E$ , wobei  $E$  und  $E'$  die Energie des Elektrons vor und nach der Wechselwirkung bezeichnen. Man bezeichnet die Streuung als tiefinelastisch, wenn der Impulsübertrag  $Q^2$  so groß ist, dass das Nukleon bei dem Prozess zerstört wird und so ein System  $X$  von Hadronen entsteht. Die invariante Masse dieses Systems ist

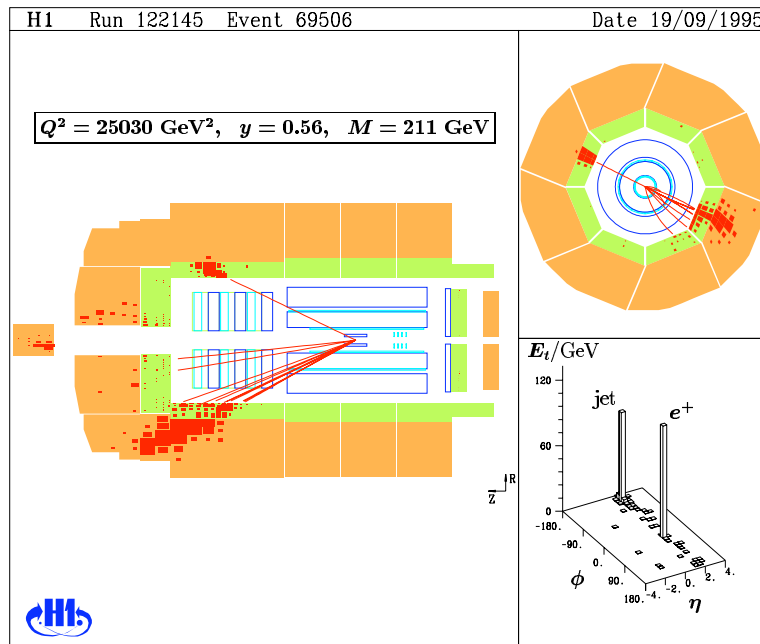
$$W^2 := M_X^2 = (p + q)^2 = m_N^2 + 2m_N \nu - Q^2, \quad (5.15)$$

und die Bedingung für DIS ist  $W^2 \gg m_N^2$ . Man definiert jetzt die dimensionslose „Bjorken-Variable“

$$x_{\text{Bj}} := \frac{Q^2}{2m_N \nu} = \frac{Q^2}{2p \cdot q}, \quad (5.16)$$

die so gewählt ist, dass sich im Fall elastischer Streuung mit  $W^2 = m_N^2$  ein Wert von  $x_{\text{Bj}} = 1$  ergibt. Bei der Streuung eines Photons an einem Parton im Proton im Rahmen des Partonmodells kann  $x_{\text{Bj}}$  mit dem Impulsbruchteil des Protons identifiziert werden, den das Parton trägt.

<sup>2</sup>Im folgenden ist mit „Elektron“ immer entweder ein Elektron oder ein Positron gemeint.



**Abbildung 5.10:** Typisches DIS-Ereignis aufgezeichnet mit dem H1-Detektor am  $ep$ -Collider HERA [H1]. Das Positron fällt von links ein und wird unter hohem Winkel gestreut. Das Proton bricht auf und bildet einen hadronischen Endzustand mit einer invarianten Masse, die viel größer als die Protonenmasse ist.

### Wirkungsquerschnitt

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für tiefinelastische  $ep$ -Streuung faktorisiert in zwei unabhängige Teile, einen „leptonischen Tensor“  $L_{\mu\nu}$ , der die Abstrahlung des Photons vom Elektron beschreibt, und einen „hadronischen Tensor“  $W^{\mu\nu}$ , der die Wechselwirkung des Photons mit dem Nukleon beschreibt:

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{2\pi y \alpha^2}{Q^4} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}. \quad (5.17)$$

Dies ist symbolisch in Abb 5.11 illustriert. Der leptonische Tensor  $L_{\mu\nu}$  ergibt sich durch Anwendung der Feynmanregeln für Lepton-Photon-Streuung zu

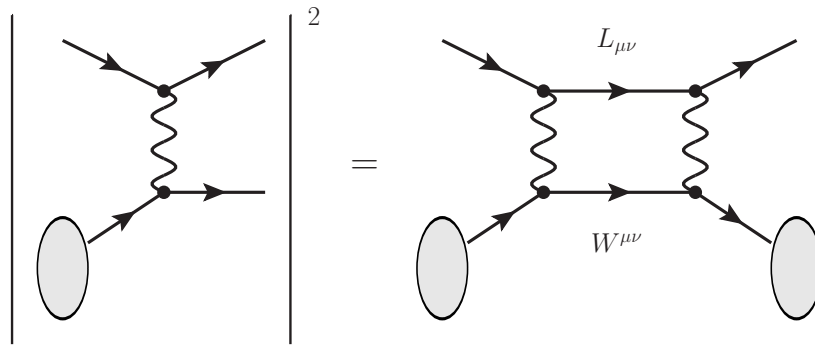
$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_\ell, s_{\ell'}} [\bar{\ell}(k') \gamma_\mu \ell(k) \bar{\ell}(k) \gamma_\nu \ell(k')], \quad (5.18)$$

wobei die Summe über die Spins des einlaufenden und des auslaufenden Leptons geht. Der hadronische Tensor  $W^{\mu\nu}$  kann im allgemeinen durch zwei tiefinelastische Formfaktoren  $W_{1,2}(x, Q^2)$  ausgedrückt werden:

$$W^{\mu\nu} = \left( -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) W_1(x_{\text{Bj}}, Q^2) + \frac{1}{m_p^2} \left( p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left( p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) W_2(x_{\text{Bj}}, Q^2). \quad (5.19)$$

Man definiert nun die dimensionslosen „Strukturfunktionen“

$$F_1(x_{\text{Bj}}, Q^2) := m_p W_1(x_{\text{Bj}}, Q^2), \quad F_2(x_{\text{Bj}}, Q^2) := v W_2(x_{\text{Bj}}, Q^2). \quad (5.20)$$



**Abbildung 5.11:** Symbolische Beschreibung der Berechnung des Wirkungsquerschnitts für die tiefinelastische Streuung. Der Wirkungsquerschnitt faktorisiert in ein Produkt aus dem leptonischen Tensor  $L_{\mu\nu}$  und dem hadronischen Tensor  $W^{\mu\nu}$ .

Daraus berechnet man den differentiellen Wirkungsquerschnitt als

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha^2}{xyQ^2} [(1-y)F_2(x_{Bj}, Q^2) + xy^2F_1(x_{Bj}, Q^2)]. \quad (5.21)$$

## 5.2.2 Naives Partonmodell

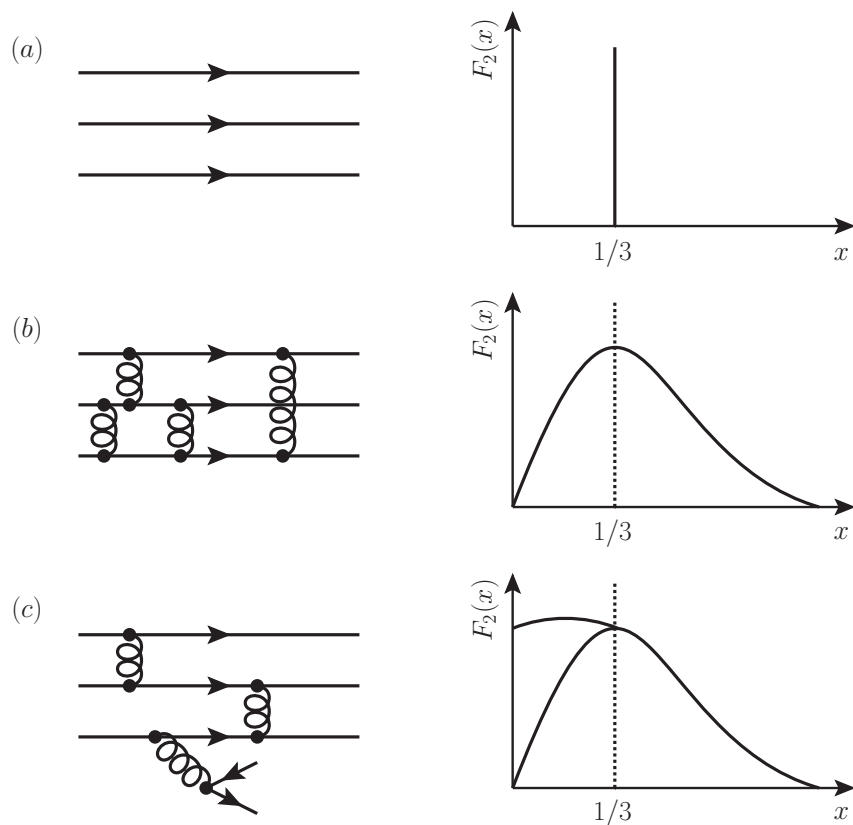
Im naiven Partonmodell sind die Quarks im Proton aufgrund der asymptotischen Freiheit quasi-freie Teilchen. In diesem Modell ist DIS eine Streuung an punktförmigen Spin-1/2-Partonen, so dass die obigen Strukturfunktionen berechenbar sind.

In einem Bezugssystem, in dem sich das Proton mit unendlichem longitudinalen Impuls bewegt, können alle Massen und Transversalimpulse vernachlässigt werden (engl.: infinite momentum frame, IMF). Wenn sich in diesem Bezugssystem ein Quark mit Impuls  $p_q = xp$  bewegt, also mit einem Bruchteil  $x$  des Protonimpulses  $p$ , gilt für die invariante Masse des Systems aus Photon und Quark  $(xp + q)^2 = m_q^2 \approx 0$ , und mit  $(xp)^2 = m_q^2 \approx 0$  ergibt sich  $x = Q^2/(2p \cdot q) = x_{Bj}$ . Im IMF ist die oben eingeführte Bjorken-Variable  $x_{Bj}$  also gleich dem Impulsanteil  $x$  des gestreuten Partons. Es ergibt sich also ein Zusammenhang zwischen dem durch die Elektronkinematik bestimmten  $x_{Bj}$  und der Partoneigenschaft  $x$ : Um mit einem Parton mit Impulsanteil  $x$  im Proton zu streuen, muss das Photon genau  $x_{Bj} = x$  besitzen. Auf diese Weise kann die Impulsverteilung der Partonen im Proton bestimmt werden. Dies führt zu der wichtigen Vorhersage des Partonmodells, dass die Strukturfunktionen nicht vom Impulsübertrag  $Q^2$  abhängen, sondern ausschließlich von  $x$ . Dieses „Bjorken-Skalenverhalten“ wurde in den 1960er Jahren zum ersten Mal am SLAC beobachten, siehe Abb. 1.4. Die Strukturfunktionen sind dann

$$F_2(x) = \sum_i q_i^2 x f_i(x) \quad (5.22)$$

$$F_1(x) = \frac{1}{2x} F_2(x) \quad (5.23)$$

Dabei wird mit  $i$  über alle Quarks im Proton summiert, und  $q_i$  sind die Quarkladungen. Die Größen  $f_i(x)$  bezeichnet man als „Partonverteilungsfunktionen“ (engl: parton distribution function, PDF), denn sie beschreiben die Wahrscheinlichkeit, ein Parton mit



**Abbildung 5.12:** Erwartung für die Strukturfunktion  $F_2(x)$  des Protons für (a) drei Valenzquarks ohne Wechselwirkung, (b) drei Valenzquarks mit Wechselwirkung, (c) drei Valenzquarks und Seequarks, z. B. aufgrund von Gluon-Splitting (nach [Hal84]).

Impulsbruchteil  $x$  im Proton zu finden. Den Zusammenhang (5.23) zwischen  $F_1$  und  $F_2$  bezeichnet man auch als Callan-Gross-Relation. Dies ist eine direkte Konsequenz der Spin-1/2-Natur der Quarks, daher kann man mit Messungen von  $F_{1,2}$  den Spin der Quarks bestimmen.

### 5.2.3 QCD und Skalenverletzungen

#### Valenz- und Seequarks, Gluonen

Das naive Partonmodell vernachlässigt völlig die Wechselwirkungen zwischen den Quarks. Im einfachsten Modell besitzt ein Proton drei „Valenzquarks“, die je genau ein Drittel des Protonimpulses tragen:  $x = 1/3$ . Durch die Bindung der Quarks mit Gluonen können sich die Impulse im Proton umverteilen, und man erwartet, dass jedes Quark nur noch im Mittel  $x = 1/3$  besitzt. Dies kann auch quantenmechanisch durch die Impulsunschärfe der im Proton „gefangenen“ Partonen begründet werden. Zusätzlich können im Proton noch Prozesse stattfinden, bei denen weitere Quarks und Antiquarks erzeugt werden, z. B. „Gluon-Splitting“  $g \rightarrow q\bar{q}$ . Damit besitzt das Proton neben den drei Valenzquarks auch „Seequarks“. Diese Überlegung ist in Abb. 5.12 illustriert.

Aus Messungen der Strukturfunktionen war ebenso ersichtlich, dass nur etwa 50% des Nukleonimpulses von den Valenz- und Seequarks getragen wurde. Die anderen 50% müssen von weiteren Partonen getragen werden, die keine Spin-1/2-Teilchen sind. Dies

ist ein Hinweis darauf, dass auch Gluonen für den Protonimpuls eine wichtige Rolle spielen. Insgesamt gibt es also Indizien dafür, dass das naive Partonmodell durch dynamische Effekte aus der QCD ergänzt werden muss, um eine realistische Beschreibung des Protons zu liefern.

### DGLAP-Evolutionsgleichungen

Durch die starke Wechselwirkung finden im Proton ständig Prozesse statt, die das Skalenverhalten verletzen, z. B. Abstrahlung von Gluonen. Dies ist schematisch in Abb. 5.13 gezeigt. Dadurch werden die PDFs zu Funktionen von  $Q^2$ :

$$f(x) \rightarrow f(x, Q^2) = f(x) + \Delta f(x, Q^2) \quad (5.24)$$

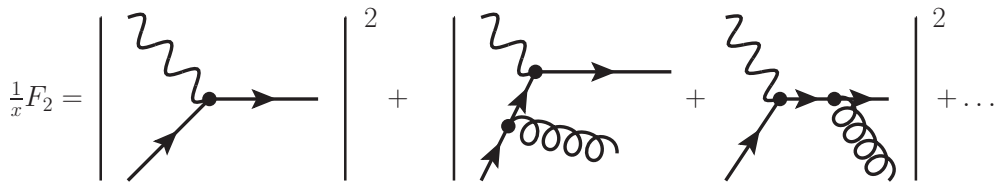
Anschaulich bedeutet dies, dass mit steigendem  $Q^2$  der „Photonsonde“ das Innere des Protons immer besser aufgelöst werden kann, so dass weitere QCD-Prozesse immer besser sichtbar werden. Ähnlich wie für die starke Kopplungskonstante kann der Wert einer PDF nicht in der QCD *ab initio* berechnet werden, wohl aber die Veränderung der PDF mit  $Q^2$ . Diese wird durch die Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi-Gleichungen (DGLAP) beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{dq(x, Q^2)}{d \ln Q^2} &= \frac{\alpha_S}{2\pi} \{q \otimes P_{qq} + g \otimes P_{qg}\} \\ &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \{q(x', Q^2) P_{qq}(x/x') + g(x', Q^2) P_{qg}(x/x')\} \quad (5.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dg(x, Q^2)}{d \ln Q^2} &= \frac{\alpha_S}{2\pi} \{q \otimes P_{gq} + g \otimes P_{gg}\} \\ &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \\ &\quad \left\{ \sum_q [q(x', Q^2) + \bar{q}(x', Q^2)] P_{gq}(x/x') + g(x', Q^2) P_{gg}(x/x') \right\} \quad (5.26) \end{aligned}$$

Diese gekoppelten Integrodifferentialgleichungen kann man anschaulich wie folgt verstehen:  $q(x, Q^2)$  und  $g(x, Q^2)$  sind die PDF eines Quarks und des Gluons. Zusätzliche Quarks mit  $x$  und  $Q^2$  können entstehen in den Prozessen  $q(x') \rightarrow q(x)g(1-x)$  und  $g(x') \rightarrow q(x)q(1-x)$  durch die Abstrahlung von Quarks. Dies ist kinematisch erlaubt, falls  $x' > x$ . Die Rate zusätzlicher Quarks erhält man, wenn man die Wahrscheinlichkeit für diese Prozesse mit den PDFs für die entsprechenden Quarks und Gluonen faltet. Analoges gilt für die Gluon-PDF und die Prozesse  $q \rightarrow gq$  und  $g \rightarrow gg$ . Die Funktionen  $P_{ij}(z)$  heißen „Splitting-Funktionen“, sie geben die Wahrscheinlichkeit an, dass Parton  $j$  ein Parton  $i$  mit dem Bruchteil  $z$  seines Impulses emittiert. Die Splitting-Funktionen können mittels perturbativer QCD berechnet werden. Die PDFs müssen hingegen experimentell bestimmt werden, so dass sie mithilfe der DGLAP-Evolutionsgleichungen zu beliebigen  $x$  und  $Q^2$  extrapoliert werden können.

Dieses Bild von der inneren Dynamik des Protons ist in Experimenten zur DIS genau bestätigt worden. Die Messung von Strukturfunktion wie  $F_2(x, Q^2)$  ist dabei letztlich



**Abbildung 5.13:** Beiträge höherer Ordnung zur tiefinelastischen Streuung.

die Messung eines Wirkungsquerschnitts für den DIS-Prozess. In Abb. 5.14 ist eine Sammlung von  $F_2$ -Messungen in verschiedenen Energiebereichen gezeigt. Im Bereich zwischen  $x = 0,05$  und  $x = 0,2$  zeigt sich Skalenverhalten, außerhalb dieses Bereichs werden Skalenverletzungen beobachtet. Die Skalenverletzungen sind proportional zu  $\alpha_S$ , daher kann aus dem inklusiven Wirkungsquerschnitt für die Jetproduktion in DIS auch eine präzise Bestimmung von  $\alpha_S$  durchgeführt werden.

### Partonverteilungen

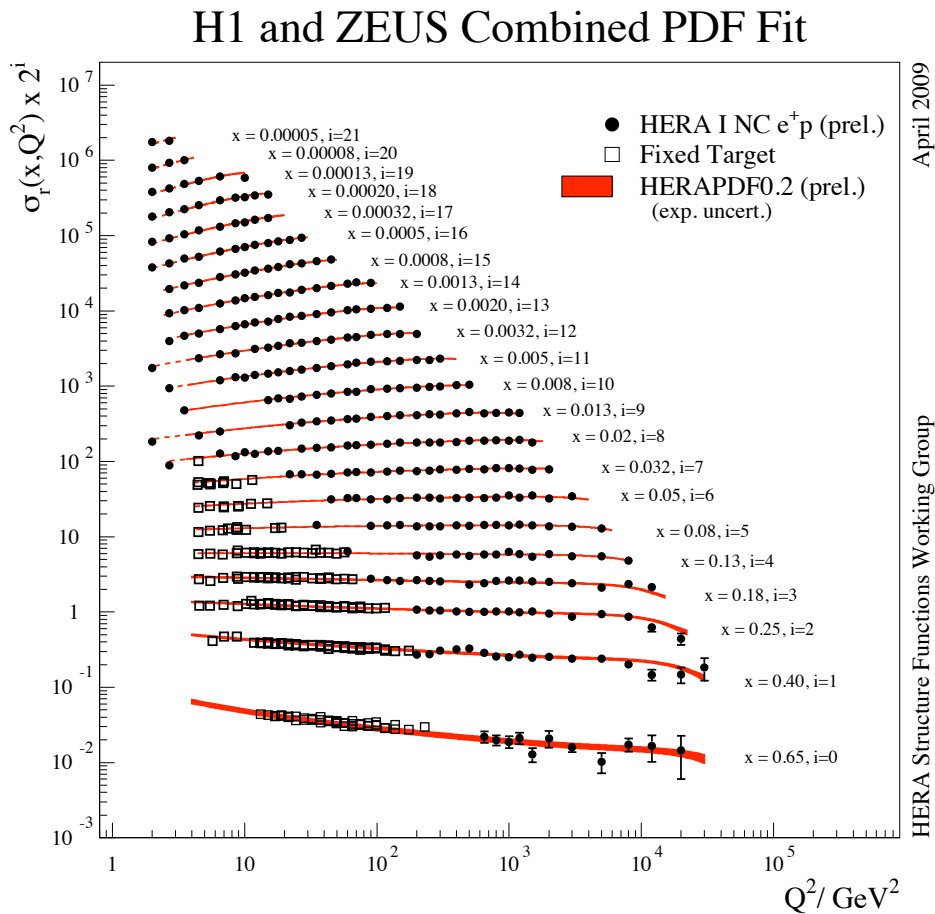
Die PDFs stellen universelle Eigenschaften des Protons dar, die nicht vom Prozess abhängen, in dem sie bestimmt werden. Neben DIS-Daten von den HERA-Experimenten können PDFs z. B. auch aus  $p\bar{p}$ -Streuung am Tevatron und aus Neutrinostreuung gewonnen werden. Startwerte für die Evolution der PDFs werden heute hauptsächlich aus globalen Fits an all diese Daten gewonnen. Die resultierenden Verteilungen können dann in Berechnungen und Simulationen aller möglichen QCD-Streuprozesse verwendet werden, wie in Abschnitt 5.2.4 diskutiert wird. Die derzeit gängigsten PDF-Sammlungen stammen von den CTEQ- und MSTW-Gruppen [Nad08, Mar09]. Gleichzeitig arbeiten auch die HERA-Experimente an eigenen PDF-Bibliotheken. Abb. 5.15 zeigt einen Vergleich der PDF-Resultate verschiedener Gruppen. Auffällig ist der starke Anstieg der Gluon-PDF für kleine Werte von  $x$ , der durch die HERA-Experimenten erstmals nachgewiesen wurde. Wegen dieses Anstiegs wird erwartet, dass in hochenergetischen Proton-Proton-Kollisionen beim LHC die Gluon-Gluon-Fusion der dominante Streuprozess ist.

## 5.2.4 QCD an Hadron-Collidern

### Faktorisierung in der QCD

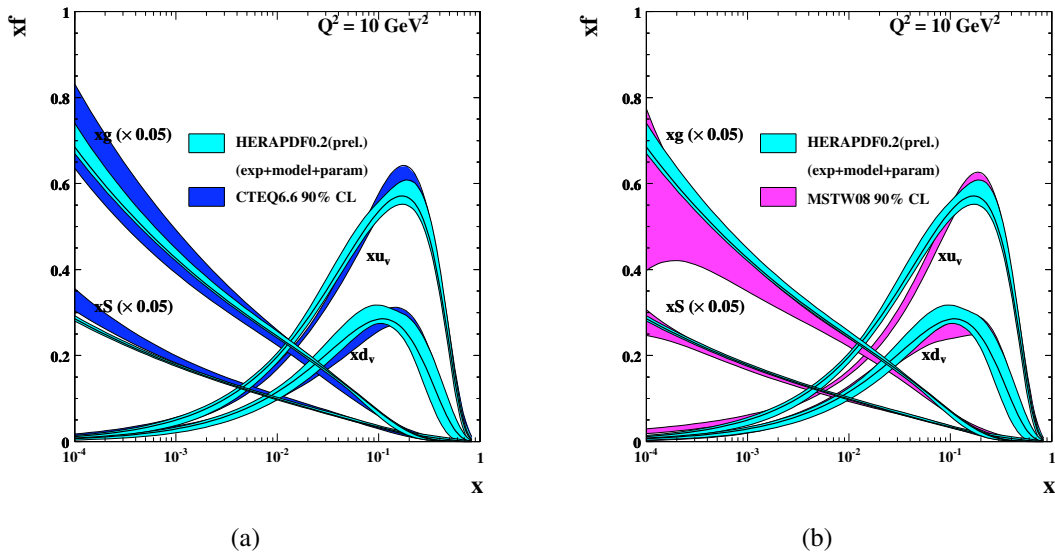
Das Partonmodell (inklusive QCD-Korrekturen) erlaubt die Berechnung von Hadron-Hadron-Kollisionen, in denen eine „harter Streuprozess“, also eine Streuung mit großem  $Q^2$ , vorkommt. In dieser Konstellation kann man in der Störungstheorie beweisen, dass der harte Prozess separiert werden kann von Prozessen bei kleineren  $Q^2$ . Dies entspricht einer Trennung von Effekten bei kurzen Längenskalen von langreichweitigen Effekten. Diese Eigenschaft bezeichnet man als „Faktorisierung“. Damit kann man den differentiellen Wirkungsquerschnitt einer Hadron-Hadron-Kollision als Funktion einer beliebigen kinematischen Variable  $X$  allgemein schreiben als

$$\frac{d\sigma}{dX} = \sum_{j,k} \int d\hat{X} f_j(x_1, Q_i^2) f_k(x_2, Q_i^2) \frac{d\hat{\sigma}_{ij}(Q_i^2, Q_f^2)}{d\hat{X}} F(\hat{X} \rightarrow X; Q_i^2, Q_f^2). \quad (5.27)$$

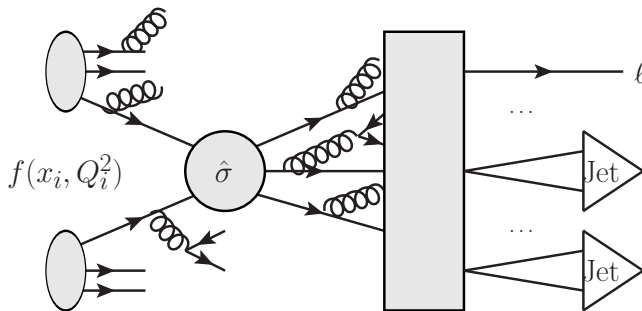


**Abbildung 5.14:** Messungen der Strukturfunktion  $F_2$  des Protons [HER09]. Der reduzierte DIS-Wirkungsquerschnitt  $\sigma^r \approx F_2$  ist für verschiedene Werte von  $x$  gegen  $Q^2$  aufgetragen. Im mittleren  $x$ -Bereich zeigt  $F_2$  Skalenverhalten, ist also unabhängig von  $Q^2$ . Für sehr große und sehr kleine  $x$  sind Skalenverletzungen zu sehen. Zur besseren Lesbarkeit sind die Werte mit Faktoren  $2^i$  multipliziert.

Dabei sind  $f_j$  und  $f_k$  die PDFs der einlaufenden Partonen mit Impulsbruchteilen  $x_1$  und  $x_2$ , und es wird über die Wirkungsquerschnitte aller harten Subprozesse  $d\hat{\sigma}/d\hat{X}$  integriert, die zu einem Endzustand mit  $X$  führen. Die Funktion  $F$  parametrisiert den Übergang von den am harten Subprozess beteiligten Partonen zu Messgrößen im Experiment, z. B. Jets. Der Inhalt von Gleichung (5.27) ist in Abb. 5.16 illustriert. Die Faktorisierung trennt also die PDFs, die die Struktur des Protons beschreiben, sowie die Hadronisierung aller farbgeladenen Teilchen vom harten Subprozess. Die PDFs werden wie in Abschnitt 5.2.3 beschrieben bestimmt. Da sie universell sind, können die im wesentlichen bei HERA gemessenen PDFs für Hadron-Hadron-Kollisionen verwendet werden. Die Hadronisierung sowie weitere Reaktionen zwischen den „Zuschauer-Partonen“ können nicht in der perturbativen QCD berechnet werden. Für sie gibt es phänomenologische Modelle, die in so genannten Partonschauer-Simulationen implementiert sind. Die PYTHIA-Simulation [Sjö06] ist die bekannteste Simulation dieser Art, sie verwendet das Lund-Stringmodell, um die Hadronisierung zu beschreiben.



**Abbildung 5.15:** PDFs für Valenzquarks  $u_v(x)$  und  $d_v(x)$ , sowie Gluonen  $g(x)$  und Seequarks  $S(x)$  bei festem  $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$  [HER09]. (a) Vergleich von CTEQ6.6 und HERAPDF0.2. (b) Vergleich von MSTW2008 und HERAPDF0.2. Die PDFs für Gluonen und Seequarks steigen für kleine Werte von  $x$  stark an und sind deshalb um einen Faktor 20 verkleinert dargestellt. Die farbigen Bänder geben die Unsicherheiten der PDFs auf 90% Vertrauensniveau an.



**Abbildung 5.16:** Faktorisierung in der QCD. Die Hadron-Hadron-Streuung lässt sich zerlegen in PDFs für die einfallenden Partonen, den harten Subprozess und die Hadronisierung der ausfallenden Partonen.

### Jetalgorithmen

Um hadronische Endzustände zu charakterisieren, werden Werkzeuge zum Nachweis von Jets und zur Beschreibung der Ereignisform benötigt. Diese Werkzeuge sind sowohl für Hadron-Collider als auch für Lepton-Collider relevant. Zum Jetnachweis stehen sowohl die Spuren der geladenen Teilchen im Jet als auch die Energiedepositionen („Cluster“) im Kalorimeter zur Verfügung. Es gibt zwei Hauptklassen von Jetalgorithmen, die Kegelalgorithmen (engl.: cone algorithms) und die Rekombinationsalgorithmen.

Bei einem Kegelalgorithmus werden, meist ausgehend von einem Startpunkt mit den Koordinaten  $(y_j, \phi_j)$  (engl.: seed), alle Spuren oder Kalorimeter-Cluster einem Jet zugeordnet, die innerhalb eines Kegels mit dem Radius

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(y_i - y_j)^2 + (\phi_i - \phi_j)^2} < R \tag{5.28}$$

liegen. Überlappen sich zwei Jets, kann man sie entweder zu einem Jet mit neuem Mittelpunkt vereinigen oder voneinander trennen. Typischerweise werden Jets getrennt,



wenn sie weniger als 50% ihrer Energie mit dem jeweils anderen Jet teilen. Die Wahl des Kegelradius  $R$  hängt von der physikalischen Fragestellung ab, typische Werte sind  $R = 0,4$ ,  $R = 0,7$  und  $R = 1,0$ .

Die meisten Rekombinationsalgorithmen kombinieren einen Jet mit dem Teilchen, welches anhand der Abstandsdefinition

$$d_{ij} = \min(k_{T,i}^{2p}, k_{T,j}^{2p}) \frac{\Delta_{ij}^2}{R^2}, \quad d_{iB} = k_{T,i}^{2p} \quad (5.29)$$

den geringsten Abstand von ihnen besitzt, wobei  $k_{T,i}$  der Transversalimpuls des  $i$ -ten Teilchen ist. Dies geschieht so lange, bis der Abstand zum Strahl  $d_{iB}$  der kürzeste Abstand ist. Der Algorithmus mit  $p = 0$  heißt Cambridge/Aachen-Algorithmus,  $p = 1$  heißt  $k_T$ -Algorithmus und  $p = -1$  bezeichnet den Anti- $k_T$ -Algorithmus. Ein Beispiel für die Anwendung von unterschiedlicher Jetalgorithmen auf dasselbe simulierte Ereignis ist in Abb. 5.17 gezeigt. Die in einem Jet rekonstruierte Energie muss dann noch aufwändig auf die Energie des Partons zurückgerechnet werden. Die Unsicherheit dieser „Jet-Energieskala“ ist häufig eine der größten Unsicherheiten an Hadron-Collidern.

### Ereignisformen

Oft kann man hadronische Ereignisse anhand ihrer Form unterscheiden. Dabei sucht man z. B. nach Vorzugsrichtungen für den Energiefluss und danach, wie kugelförmig die Anordnung der Teilchen ist. Hier sollen nur einige Beispiele für solche Formvariablen (engl.: event shape variables) erwähnt werden. Bei Jet-Ereignissen verwendet man die Variable „Thrust“ (Schub, Hauptrichtung). Sie ist definiert als

$$T := \max_{\vec{n}} \frac{\sum_i |\vec{n} \cdot \vec{p}_i|}{\sum_i |\vec{p}_i|}, \quad (5.30)$$

wobei über alle Impulsvektoren  $\vec{p}_i$  der rekonstruierten Teilchen im Ereignis summiert wird und  $\vec{n}$  ein beliebiger Einheitsvektor ist. Wenn zwei Jets Rücken an Rücken emittiert werden, ist  $T \approx 1$ , für Ereignisse mit drei oder mehr Jets ist  $T \in [0,5; 1)$ . Eine weitere oft benutzte Ereignisvariable ist der Impulstensor

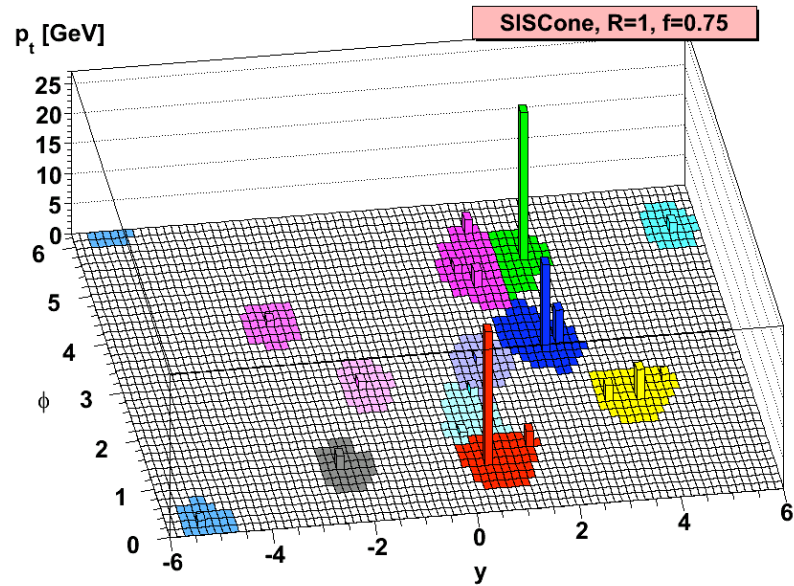
$$S^{\alpha\beta} = \frac{\sum_i p_i^\alpha p_i^\beta}{\sum_i |\vec{p}_i|^2}, \quad (5.31)$$

wobei  $i$  die Teilchen numeriert und  $p^{\alpha,\beta}$  mit  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  die Komponenten des Impulsvektors  $\vec{p}$  sind. Bei der Diagonalisierung von  $S^{\alpha\beta}$  ergeben sich drei Eigenwerte  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ , deren Summe 1 ergibt. Damit werden die Sphärität  $S$  und die Aplanarität  $A$  definiert als

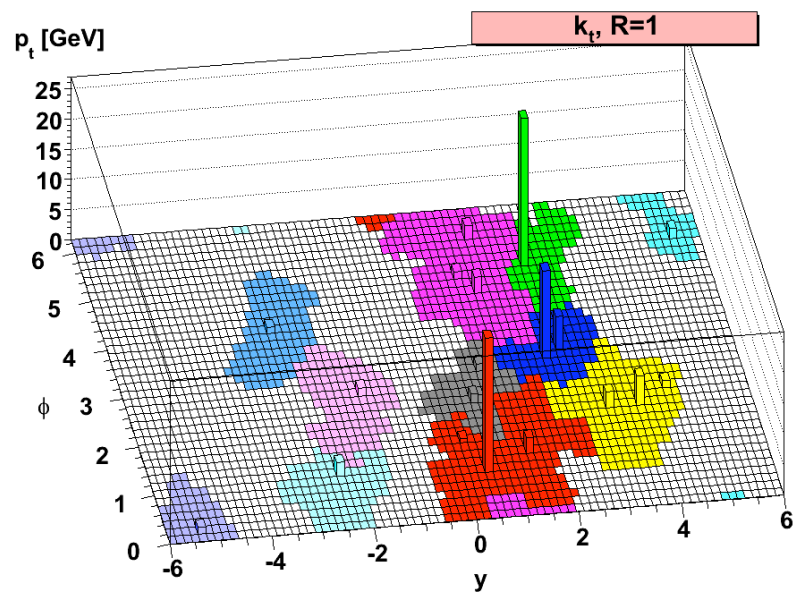
$$S := \frac{3}{2}(\lambda_2 + \lambda_3), \quad (5.32)$$

$$A := \frac{3}{2}\lambda_3. \quad (5.33)$$

Die Sphärität ist ein Maß dafür, wie isotrop ein Ereignis ist. Bei einem isotropen Ereignis erwartet man  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/3$ , also  $S = 1$ , ansonsten  $S < 1$ . Die Aplanarität nimmt Werte an zwischen  $A = 0$  (planares Ereignis) und  $A = 1/2$  (isotropes Ereignis).



(a)



(b)

**Abbildung 5.17:** Anwendung von Jetalgorithmen auf ein simuliertes Ereignis. (a) Kegelalgorithmus (SIScone). (b) Rekombinationsalgorithmus ( $k_T$ ) [Cac08]. Gezeigt sind die Energiedepositionen in der  $y\phi$ -Ebene (Lego-Histogramm) und die identifizierten Jets (farbige Flächen).